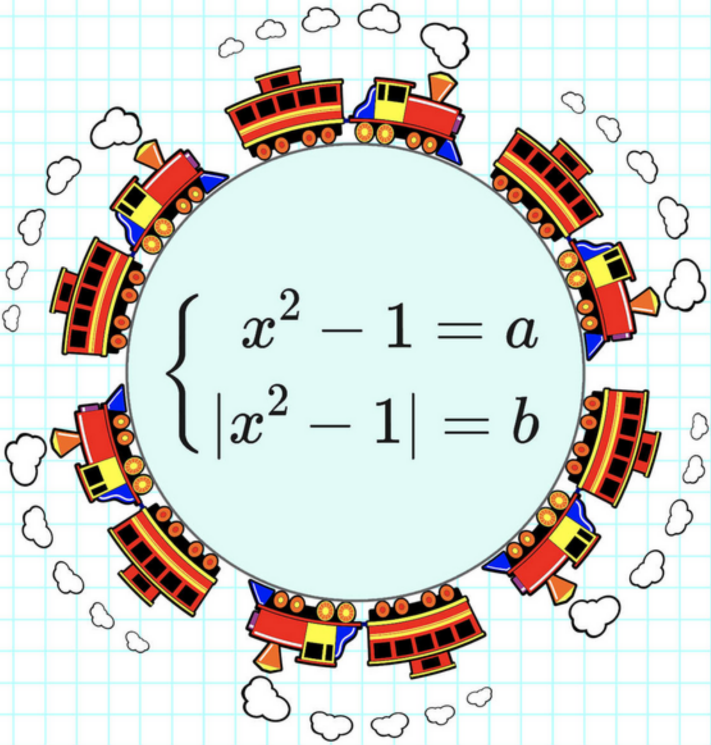
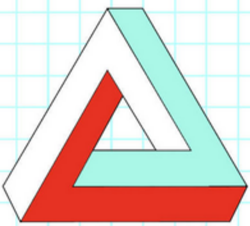
Е. В. Смыкалова

МАТЕМАТИКА

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ





8-9

Е. В. Смыкалова

Математика
Задачи
с параметрами

8-9 классы

Демоверсия

Санкт-Петербург
СМИ МетаШкола
2025

УДК 373.51
ББК 20.я72

Смыкалова Елена Владимировна

С52 Математика. Задачи с параметрами.
8-9 классы / Е. В. Смыкалова. – СПб.: СМИ МетаШкола, 2025. – 101 с. – ISBN 978-5-6052864-6-2

Сборник содержит 150 задач с параметрами для 8-9 классов: решение уравнений с параметром, решение уравнений с модулем и параметром, линейная и квадратичная функции, системы уравнений, неравенства с параметром, задачи повышенной сложности. Приводятся образцы оформления для первых четырёх задач каждой главы. Ко всем задачам есть ответы и подробные решения в конце книги. Книга будет интересна и полезна ученикам 8-9 классов, их родителям и учителям математики.

ISBN 978-5-6052864-6-2

www.metaschool.ru

Оглавление

Предисловие

Сборник содержит 150 задач с параметрами для 8-9 классов: решение уравнений с параметром, решение уравнений с модулем и параметром, линейная и квадратичная функции, системы уравнений, неравенства с параметром, задачи повышенной сложности. Рассматриваются различные способы решения задач.

Приводятся образцы оформления для первых четырёх задач каждой главы. Ко всем задачам есть ответы и подробные решения в конце книги. Книга будет интересна и полезна ученикам 8-9 классов, их родителям и учителям математики.

Материал книги был апробирован на уроках математики, на занятиях математического кружка в Физико-математическом лицее № 366 Санкт-Петербурга и в интернет-кружке МетаШколы www.metaschool.ru.

Желаем успехов в изучении математики!

1. Уравнения с параметром

В уравнениях иногда некоторые коэффициенты заданы не конкретными числами, а обозначены буквами. Такие буквы называются параметрами. Предполагается, что эти параметры могут принимать любые числовые значения.

Например, уравнения с неизвестным x и параметром k:
$kx=5$; $2x+k=7$; $3x+4=5k$.

Решить уравнение с параметром —

- найти корни заданного уравнения при всех возможных значениях параметра;
- показать, что при определённых значениях параметра корней нет.

Линейное уравнение $ax+b=c$ — уравнение с неизвестным x и параметрами a, b, c.
Если $a\neq 0$, то уравнение имеет единственный корень $x=(c-b):a$.
Если $a=0$, $b=c$, то корнями данного уравнения являются все действительные числа.
Если $a=0$, $b\neq c$, то данное уравнение корней не имеет.

Квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ с неизвестным x можно рассматривать как уравнение с параметрами a, b, c ($a \neq 0$).

Например, квадратные уравнения с параметрами a, b и c: $ax^2+bx+c=0$; $(a+6)\cdot x^2-bx+3=0$; $(2a+8)\cdot x^2-(a+4)\cdot x+3=0$.

Уравнение $ax^2+bx+c=0$.
Если $a=0$, $b \neq 0$ то уравнение линейное, имеет единственное решение: $x=-c/b$.
Если $a \neq 0$, то уравнение квадратное:
два корня, если дискриминант $b^2-4ac>0$;
один корень, если дискриминант $b^2-4ac=0$;
корней нет, если дискриминант $b^2-4ac<0$.

Квадратное уравнение вида $x^2+px+q=0$ называется приведённым.

Теорема Виета.
Если x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+px+q=0$, то справедливы равенства: $x_1+x_2=-p$; $x_1 \cdot x_2=q$.
Сумма корней приведённого квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.

1. При каком значении параметра k корни уравнений $kx–3x=4$ и $4(x+1)=2(x–3)–6$ противоположные числа?

Решение.

Найдём корень второго уравнения:
$4(x+1)=2(x–3)–6$;
$4x+4=2x–6–6$;
$2x=–16$;
$x=–8$.
Числа –8 и 8 — противоположные.
Если $x=8$ корень уравнения $kx–3x=4$, то
$8k–24=4$; $8k=28$; $k=3,5$.
Ответ: 3,5.

-
-
-

50. При каких значениях параметра k произведение корней уравнения $x^2–6x–k^2–7k=0$ равно нулю?

2. Уравнения с модулем и параметром

Модулем (абсолютной величиной) действительного числа x называется:

- само это число, если оно неотрицательное;
- число, взятое с противоположным знаком, если оно отрицательное.

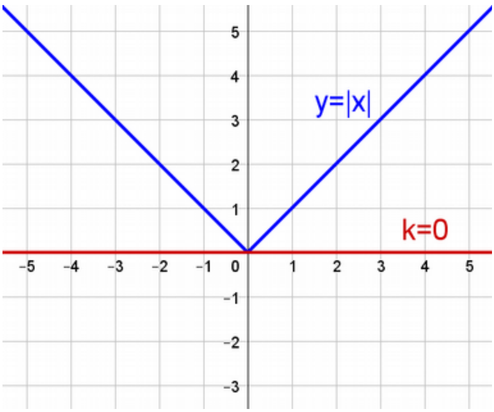
Модуль числа x:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

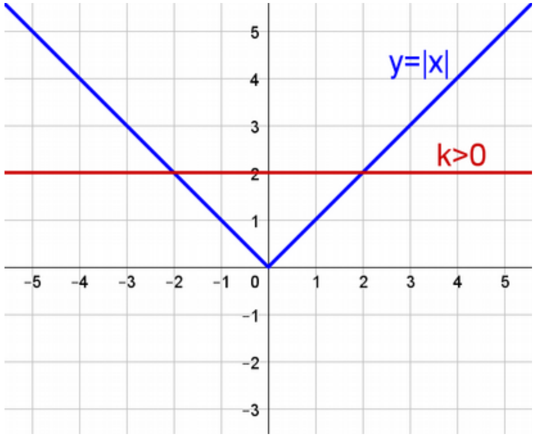
Модуль любого действительного числа x есть неотрицательное число: $|x| \geq 0$.

Например:

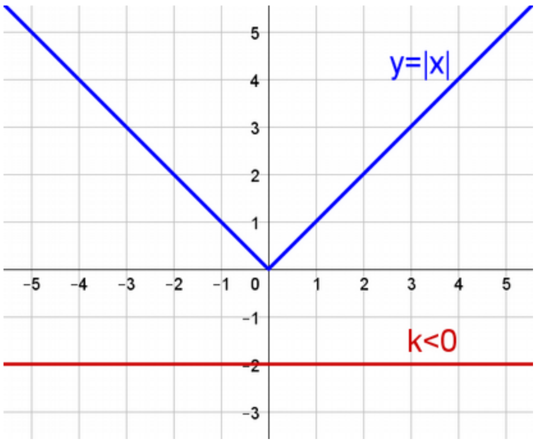
Уравнение с неизвестным x и параметром k: $|x|=k$.
Если $k=0$, то один корень: $x=0$.



Если $k>0$, то два различных корня: $x=k$; $x=-k$.



Если $k<0$, то решений нет.



51. При каких значениях параметра k уравнение $|2x-5|+1=k^2-3$ имеет ровно один корень?

Решение.

$|2x-5|+1=k^2-3$;
$|2x-5|=k^2-4$;
$|2x-5|=(k-2)(k+2)$.
Уравнение имеет один корень, если $(k-2)(k+2)=0$; $k=\pm2$.
Если $k=\pm2$, то один корень: $|2x-5|=0$; $2x-5=0$; $x=2{,}5$.
Ответ: –2; 2.

-
-
-

70. При каком значении параметра k корнями уравнения $|x+k-4|=5$ являются противоположные числа?

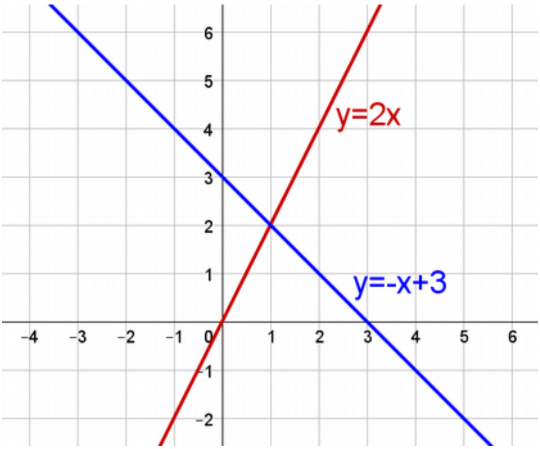
3. Линейная и квадратичная функции

Линейная функция — это функция вида $y=kx+b$,
где k и b — заданные числа.

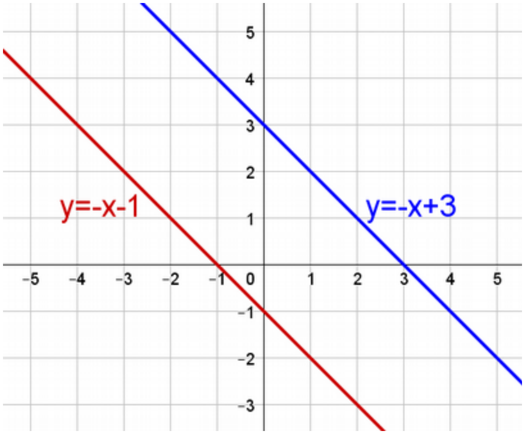
Графиком линейной функции $y=kx+b$ является прямая.

На плоскости возможны три случая взаимного расположения двух прямых.

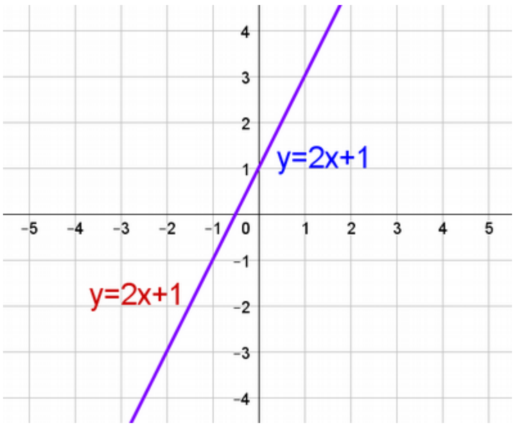
1) Прямые пересекаются, имеют одну общую точку.
$y=kx+b$; $y=nx+m$; $k \neq n$.



2) Прямые параллельны, не имеют общих точек.
y=kx+b; y=nx+m; k=n.



3) Прямые совпадают.
y=kx+b; y=nx+m; k=n; b=m.

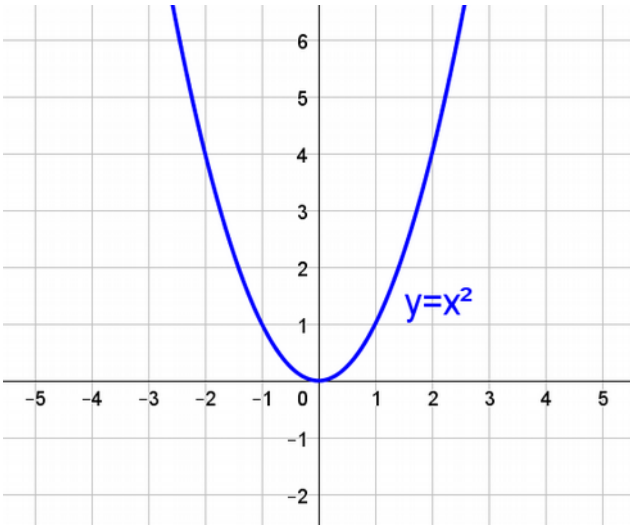


Квадратичная функция — это функция вида $y=ax^2+bx+c$, где a, b, c — заданные действительные числа, $a\neq0$, x — действительная переменная.
Например: $y=x^2$; $y=-3x^2$; $y=x^2-x$; $y=-x^2+2x-1$.

Нули квадратичной функции — это такие значения x, при которых функция принимает значение, равное 0.

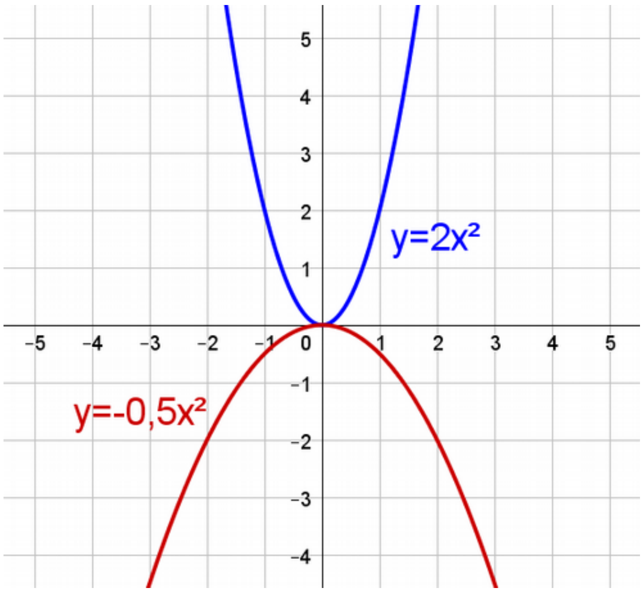
Функция $y=x^2$ — это квадратичная функция $y=ax^2+bx+c$ при $a=1$, $b=c=0$.

График функции $y=x^2$ — парабола.



Функция $y=ax^2$ — это квадратичная функция $y=ax^2+bx+c$ при $a\neq 0$, $b=c=0$.

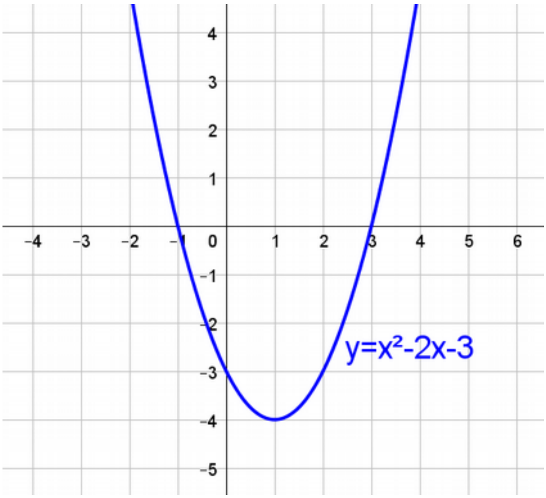
График функции $y=ax^2$ при любом $a\neq 0$ — парабола. При $a>0$ ветви параболы направлены вверх, при $a<0$ — вниз.



Функция $y=ax^2+bx+c$ — это квадратичная функция при $a\neq 0$.

График функции $y=ax^2+bx+c$ — парабола, получаемая сдвигом параболы $y=ax^2$ вдоль координатных осей.

Координаты (x_0; y_0) вершины параболы $y=ax^2+bx+c$ можно найти по формулам: $x_0=-b/2a$; $y_0=y(x_0)=ax_0^2+bx_0+c$.



71. Прямая $y=kx-2b$ проходит через точку A(2; –6) и параллельна прямой $2x-y=7$. Найдите коэффициенты k и b.

Решение.

Первая прямая $y=kx-2b$; $x=2$; $y=-6$;
$-6=k\cdot 2-2b$; $2b=2k+6$; $b=k+3$.
Вторая прямая $2x-y=7$; $y=2x-7$.
Прямые $y=kx-2b$ и $y=2x-7$ параллельны, тогда $k=2$.
Если $k=2$, то $b=2+3$; $b=5$.

Прямые $y=2x-10$ и $y=2x-7$ параллельны.
Ответ: $k=2$; $b=5$.

-
-
-

90. При каких значениях параметра k вершина параболы $y=x^2+kx+25$ находится на оси абсцисс?

4. Системы уравнений

Решением системы двух уравнений с двумя неизвестными называют такую пару чисел x и y, которые при подстановке в эту систему обращают каждое её уравнение в верное равенство.
Решить систему уравнений — найти все её решения или установить, что их нет.

Решение системы уравнений:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0; \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases}$$

Если $a_1/a_2=b_1/b_2=c_1/c_2$, то система уравнений имеет бесконечное множество решений. Графическое решение: прямые совпадают.

Если $a_1/a_2=b_1/b_2\neq c_1/c_2$, то система уравнений противоречива, не имеет решений. Графическое решение: прямые параллельны.

Если $a_1/a_2\neq b_1/b_2$, то система уравнений имеет единственное решение. Графическое решение: прямые пересекаются, имеют одну общую точку.

91. При каком значении k система уравнений

$$\begin{cases}(k+3)\cdot x-4y=3k-5;\\ kx+(k-2)\cdot y=3\end{cases}$$

не имеет решений?

Решение.

Если (k+3)/k=–4/(k–2)≠(3k–5)/3, то система уравнений не имеет решений.
k≠0; k≠2.
Из равенства (k+3)/k=–4/(k–2) получаем:
(k+3)(k–2)=–4k;
k^2+k–6+4k=0;
k^2+5k–6=0;
k=1; k=–6.
Проверка, удовлетворяют ли найденные значения второму условию: –4/(k–2)≠(3k–5)/3.
Если k=1, то –4/(–1)≠(–2)/3.
Если k=–6, то –4/(–8)≠(–23)/3.
Ответ: –6; 1.

-
-
-

110. При каких значениях параметра a система уравнений {ax+4y=2a; x+ay=a имеет единственное решение? Найдите

это решение.

5. Неравенства с параметром

Решить неравенство с параметром — для любого допустимого значения параметра найти множество всех решений заданного неравенства.
Например, решение неравенства $ax<2$:
если $a=0$ — x – любое число;
если $a>0$, то $x<2/a$;
если $a<0$, то $x>2/a$.

111. Решить неравенство: $5x–a>ax–3$.

Решение.

$5x–a>ax–3$;
$(5–a)\cdot x>a–3$.
Если $a=5$, то $0\cdot x>2$, решений нет;
если $5–a>0$, $a<5$, то $x>(a–3)/(5–a)$;
если $5–a<0$, $a>5$, то $x<(a–3)/(5–a)$.
Ответ: если $a<5$, то $x>(a–3)/(5–a)$; если $a=5$, то решений нет; если $a>5$, то $x<(a–3)/(5–a)$.

130. При каком наименьшем целом значении параметра k неравенство $(k-1)\cdot x^2-(k+1)\cdot x+k+1>0$ справедливо при всех действительных значениях x?

6. Задачи повышенной сложности

131. При каком значении параметра k сумма квадратов корней уравнения $x^2+x+k=0$ равна 13?

Решение.

По теореме Виета: $x_1+x_2=-1$, $x_1 \cdot x_2=k$.
Сумма квадратов корней уравнения:
$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1 \cdot x_2=(-1)^2-2k=1-2k$.
По условию $1-2k=13$, тогда $-2k=12$; $k=-6$.
Ответ: $k=-6$.

-
-
-

150. При каких значениях параметра k система уравнений $\{y=kx+3;\ (x-1)^2+y^2=4$ имеет единственное решение?

Решения и ответы

5. 1.
Привести уравнение к виду: $(k-1)\cdot x=k+1$.
Если $k\neq 1$, то $x=(k+1)/(k-1)$;
если $k=1$, то $0\cdot x=2$, решений нет.

6. –2.
Привести уравнение к виду: $(k+2)\cdot x=k-2$.
Если $k\neq -2$, то $x=(k-2)/(k+2)$;
если $k=-2$, то $0\cdot x=-4$, решений нет.

7. $k\neq 5$.
$kx-1=5x+3$;
$kx-5x=3+1$;
$(k-5)\cdot x=4$.
Если $k\neq 5$, то единственное решение: $x=4/(k-5)$.
Если $k=5$, то $0\cdot x=4$, решений нет.

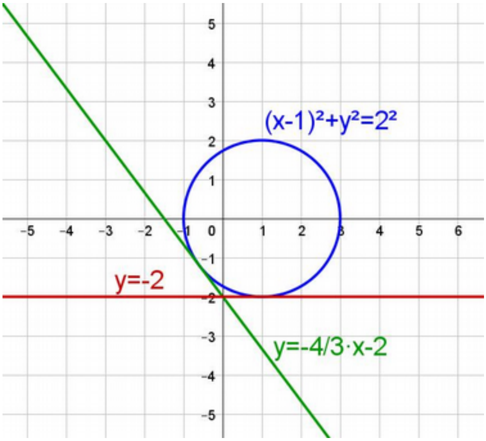
-
-
-

150. $k=0$; $k=-4/3$.
$\{y=kx-2;\ (x-1)^2+y^2=4;$

$\{y=kx-2;\ (x-1)^2+(kx-2)^2=4.$

$x^2-2x+1+k^2x^2-4kx+4=4;$

$(1+k^2)\cdot x^2-(2+4k)\cdot x+1=0.$



Единственное решение уравнения $(1+k^2)\cdot x^2-(2+4k)\cdot x+1=0$ при $D=0$:

$D=(2+4k)^2-4\cdot 1\cdot(1+k^2);$

$(2+4k)^2-4\cdot 1\cdot(1+k^2)=0;$

$4+16k+16k^2-4-4k^2=0;$

$12k^2+16k=0;$

$4k(3k+4)=0;$

$k=0;\ k=-4/3.$

Если $k=0$, то прямая $y=-2$.

Если $k=-4/3$, то прямая $y=-4/3\cdot x-2$.

Электронные издания

(СМИ МетаШкола)

Задачи на числа

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на числа. 4 класс.
2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на числа. 5 класс.
3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на числа. 6 класс.
4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на числа. 7 класс.
5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на числа. 8 класс.
6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на числа. 9 класс.

Задачи на части, дроби, проценты и пропорции

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на части и дроби. 4 класс.
2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на части и дроби. 5 класс.
3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на дроби,

проценты и пропорции. 6 класс.
4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на дроби, проценты и пропорции. 7 класс.
5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на дроби, проценты и пропорции. 8 класс.
6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на дроби, проценты и пропорции. 9 класс.

Задачи на движение

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на движение. 4 класс.
2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на движение. 5 класс.
3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на движение. 6 класс.
4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на движение. 7 класс.
5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на движение. 8 класс.
6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на движение. 9 класс.

Задачи на работу

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на работу.

4 класс.
2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на работу.
5 класс.
3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на работу.
6 класс.
4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на работу.
7 класс.
5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на работу.
8 класс.
6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на работу.
9 класс.

Задачи по геометрии

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по геометрии.
4 класс.
2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по геометрии.
5 класс.
3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по геометрии.
6 класс.
4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по геометрии.
7 класс.
5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по геометрии.
8 класс.
6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по геометрии.
9 класс.

Задачи по комбинаторике

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по комбинаторике. 4 класс.
2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по комбинаторике. 5 класс.
3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по комбинаторике. 6 класс.
4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по комбинаторике. 7 класс.
5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по комбинаторике. 8 класс.
6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по комбинаторике. 9 класс.

Задачи по теории вероятностей

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории вероятностей. 4 класс.
2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории вероятностей. 5 класс.
3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории вероятностей. 6 класс.
4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории вероятностей. 7 класс.
5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории

вероятностей. 8 класс.
6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории вероятностей. 9 класс.

Задачи по теории множеств

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на множества. 4 класс.
2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на множества. 5 класс.
3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на множества. 6 класс.
4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на множества. 7 класс.
5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на множества. 8 класс.
6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на множества. 9 класс.

Задачи по теории графов

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории графов. 4 класс.
2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории графов. 5 класс.
3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории графов.

6 класс.
4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории графов. 7 класс.
5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории графов. 8 класс.
6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории графов. 9 класс.

Задачи на логику

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на логику. 4 класс.
2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на логику. 5 класс.
3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на логику. 6 класс.
4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на логику. 7 класс.
5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на логику. 8 класс.
6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на логику. 9 класс.

Задачи с параметрами

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи с параметрами. 6-7 классы.
2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи с параметрами. 8-9 классы.

Бумажные издания

(Издательство СМИО Пресс)

1 класс

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие игры. 1 класс

2 класс

2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие игры. 2 класс

3 класс

3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие игры. 3 класс

4 класс

4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие игры. 4 класс

5 класс

5. Смыкалова Е. В. Математика. Самостоятельные работы. 5 класс
6. Смыкалова Е. В. Математика. Сборник задач 5 класс
7. Смыкалова Е. В. Математика. Дополнительные главы 5 класс

8. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие игры 5 класс

5-6 классы

9. Смыкалова Е. В. Устный счёт в таблицах. 5-6 классы
10. Смыкалова Е. В. Математика. Опорные конспекты 5-6 классы
11. Смыкалова Е. В. Развивающее обучение на уроках математики в 5-6 классах. Программа, поурочное планирование, тесты
12. Смыкалова Е. В. Тренировка памяти и внимания на уроках математики 5-6 классы
13. Смыкалова Е. В. Устное умножение в таблицах. 5–6 классы

6 класс

14. Смыкалова Е. В. Математика. Сборник задач 6 класс
15. Смыкалова Е. В. Математика. Дополнительные главы 6 класс
16. Смыкалова Е. В. Математика. Самостоятельные работы. 6 класс
17. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие игры 6 класс

7 класс

18. Смыкалова Е. В. Математика. Сборник задач 7 класс
19. Смыкалова Е. В. Математика. Дополнительные главы 7 класс
20. Смыкалова Е. В. Алгебра. Самостоятельные работы. 7 класс.
21. Смыкалова Е. В. Самостоятельные работы по геометрии. 7 класс
22. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие игры. 7 класс

7-9 классы

23. Смыкалова Е. В. Алгебра. Опорные конспекты 7-9 классы
24. Смыкалова Е. В. Геометрия. Опорные конспекты 7-9 классы

8 класс

25. Смыкалова Е. В. Алгебра. Самостоятельные работы. 8 класс
26. Смыкалова Е. В. Геометрия. Самостоятельные работы. 8 класс
27. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие игры. 8 класс

8-9 классы

28. Смыкалова Е. В. Модули, параметры, многочлены. 8-9 классы

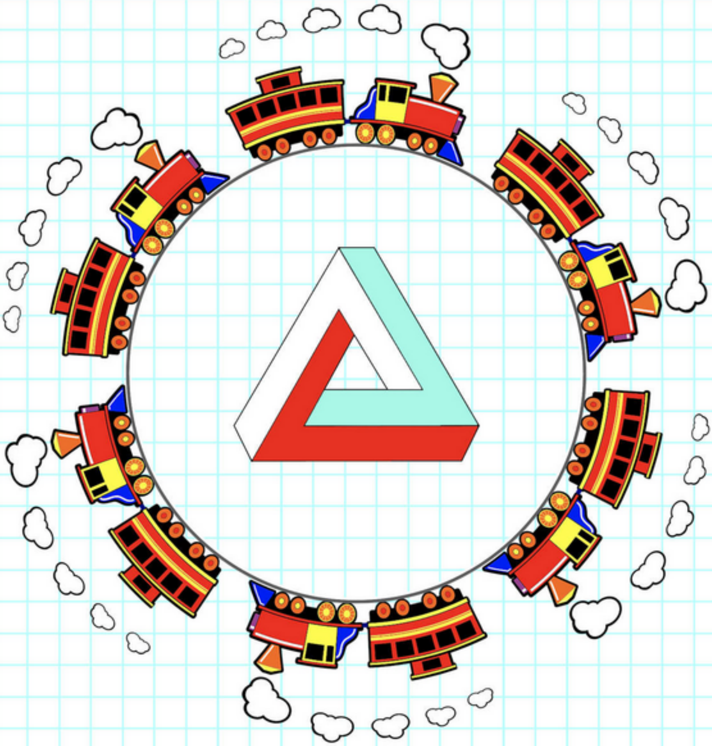
9 класс

29. Смыкалова Е. В. Самостоятельные работы по алгебре. 9 класс
30. Смыкалова Е. В. Самостоятельные работы по геометрии. 9 класс
31. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие игры. 9 класс

Все классы

32. Смыкалова Е. В. Математические каникулы. Увлекательные математические игры и головоломки
33. Смыкалова Е. В. Математические игры. На пляже, в пути, у камина

МетаШкола



ISBN 978-5-6052864-6-2