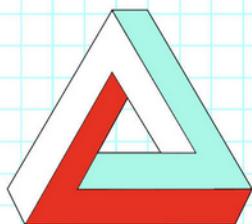
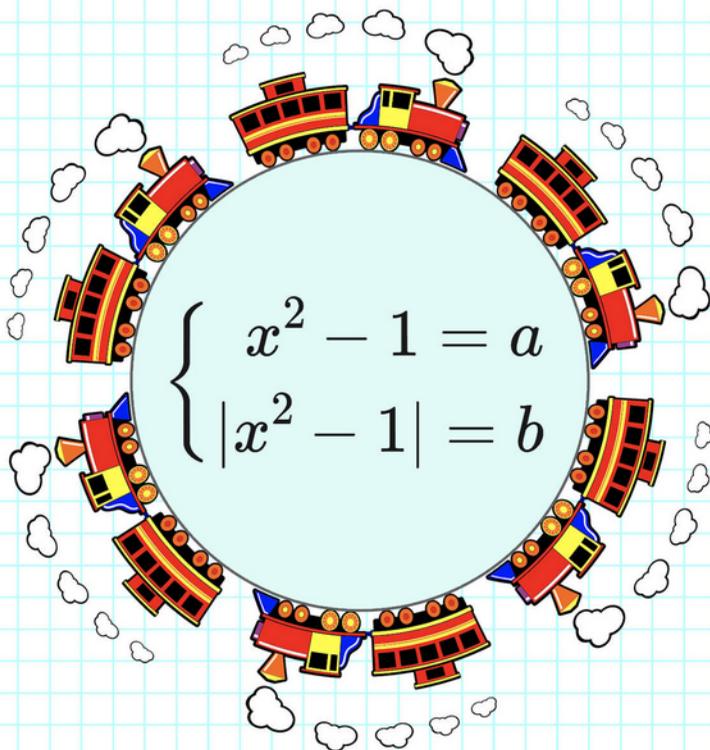


Е. В. Смыкалова

МАТЕМАТИКА

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ



Е. В. Смыкалова

Математика
Задачи
с параметрами

8-9 классы

Демонверсия

Санкт-Петербург
СМИ МетаШкола
2025

УДК 373.51
ББК 20.я72

Смыкалова Елена Владимировна

С52 Математика. Задачи с параметрами.
8-9 классы / Е. В. Смыкалова. – СПб.: СМИ МетаШкола,
2025. – 101 с. – ISBN 978-5-6052864-6-2

Сборник содержит 150 задач с параметрами для 8-9 классов: решение уравнений с параметром, решение уравнений с модулем и параметром, линейная и квадратичная функции, системы уравнений, неравенства с параметром, задачи повышенной сложности. Приводятся образцы оформления для первых четырёх задач каждой главы. Ко всем задачам есть ответы и подробные решения в конце книги. Книга будет интересна и полезна ученикам 8-9 классов, их родителям и учителям математики.

ISBN 978-5-6052864-6-2 © Смыкалова Е. В., 2025
© СМИ МетаШкола, 2025

Все права защищены.

Эта книга, целиком или частично, не может быть использована или размещена где-либо в любой форме и с использованием любых технических средств без письменного разрешения владельца авторских прав. Нарушение прав преследуется по закону.

www.metaschool.ru

Оглавление

Предисловие.....	5
1. Уравнения с параметром.....	6
2. Уравнения с модулем и параметром.....	15
3. Линейная и квадратичная функции.....	21
4. Системы уравнений.....	31
5. Неравенства с параметром.....	37
6. Задачи повышенной сложности.....	42
Решения и ответы.....	47

Предисловие

Сборник содержит 150 задач с параметрами для 8-9 классов: решение уравнений с параметром, решение уравнений с модулем и параметром, линейная и квадратичная функции, системы уравнений, неравенства с параметром, задачи повышенной сложности. Рассматриваются различные способы решения задач.

Приводятся образцы оформления для первых четырёх задач каждой главы. Ко всем задачам есть ответы и подробные решения в конце книги. Книга будет интересна и полезна ученикам 8-9 классов, их родителям и учителям математики.

Материал книги был апробирован на уроках математики, на занятиях математического кружка в Физико-математическом лицее № 366 Санкт-Петербурга и в интернет-кружке МетаШколы www.metaschool.ru.

Желаем успехов в изучении математики!

1. Уравнения с параметром

В уравнениях иногда некоторые коэффициенты заданы не конкретными числами, а обозначены буквами. Такие буквы называются параметрами. Предполагается, что эти параметры могут принимать любые числовые значения.

Например, уравнения с неизвестным x и параметром k :
 $kx=5$; $2x+k=7$; $3x+4=5k$.

Решить уравнение с параметром —

- найти корни заданного уравнения при всех возможных значениях параметра;
- показать, что при определённых значениях параметра корней нет.

Линейное уравнение $ax+b=c$ — уравнение с неизвестным x и параметрами a , b , c .

Если $a \neq 0$, то уравнение имеет единственный корень $x=(c-b):a$.

Если $a=0$, $b=c$, то корнями данного уравнения являются все действительные числа.

Если $a=0$, $b \neq c$, то данное уравнение корней не имеет.

Квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ с неизвестным x можно рассматривать как уравнение с параметрами a , b , c ($a \neq 0$).

Например, квадратные уравнения с параметрами a , b и c :
 $ax^2+bx+c=0$; $(a+6) \cdot x^2 - bx + 3 = 0$; $(2a+8) \cdot x^2 - (a+4) \cdot x + 3 = 0$.

Уравнение $ax^2+bx+c=0$.

Если $a=0$, $b \neq 0$ то уравнение линейное, имеет единственное решение: $x = -c/b$.

Если $a \neq 0$, то уравнение квадратное:

два корня, если дискриминант $b^2 - 4ac > 0$;

один корень, если дискриминант $b^2 - 4ac = 0$;

корней нет, если дискриминант $b^2 - 4ac < 0$.

Квадратное уравнение вида $x^2+px+q=0$ называется приведённым.

Теорема Виета.

Если x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+px+q=0$, то справедливы равенства: $x_1+x_2=-p$; $x_1 \cdot x_2=q$.

Сумма корней приведённого квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.

1. При каком значении параметра k корни уравнений $kx-3x=4$ и $4(x+1)=2(x-3)-6$ противоположные числа?

Решение.

Найдём корень второго уравнения:

$$4(x+1)=2(x-3)-6;$$

$$4x+4=2x-6-6;$$

$$2x=-16;$$

$$x=-8.$$

Числа -8 и 8 — противоположные.

Если $x=8$ корень уравнения $kx-3x=4$, то

$$8k-24=4; 8k=28; k=3,5.$$

Ответ: 3,5.

-
-
-

50. При каких значениях параметра k произведение корней уравнения $x^2-6x-k^2-7k=0$ равно нулю?

2. Уравнения с модулем и параметром

Модулем (абсолютной величиной) действительного числа x называется:

- само это число, если оно неотрицательное;
- число, взятое с противоположным знаком, если оно отрицательное.

Модуль числа x :

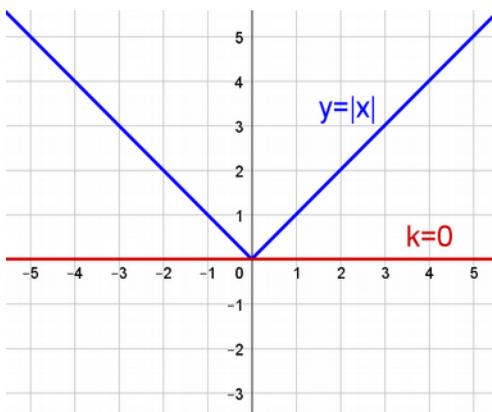
$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Модуль любого действительного числа x есть неотрицательное число: $|x| \geq 0$.

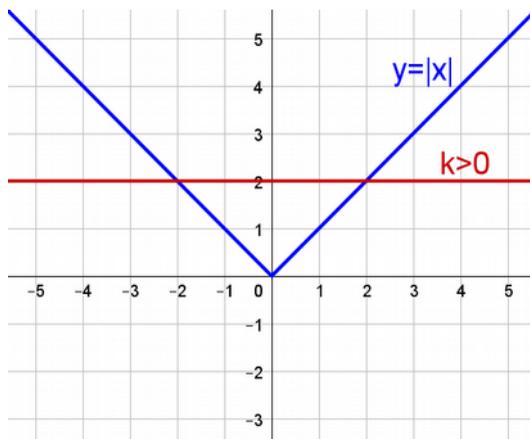
Например:

Уравнение с неизвестным x и параметром k : $|x|=k$.

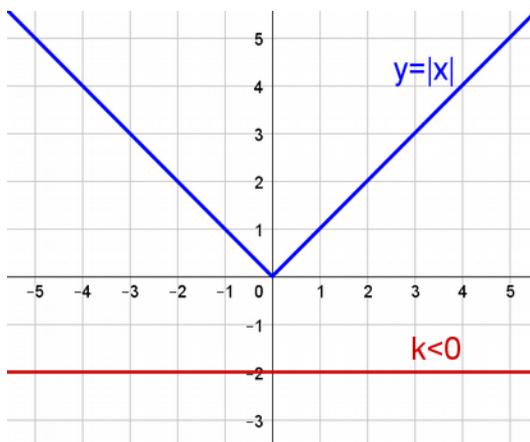
Если $k=0$, то один корень: $x=0$.



Если $k > 0$, то два различных корня: $x = k$; $x = -k$.



Если $k < 0$, то решений нет.



51. При каких значениях параметра k уравнение $|2x-5|+1=k^2-3$ имеет ровно один корень?

Решение.

$$|2x-5|+1=k^2-3;$$

$$|2x-5|=k^2-4;$$

$$|2x-5|=(k-2)(k+2).$$

Уравнение имеет один корень, если $(k-2)(k+2)=0$; $k=\pm 2$.

Если $k=\pm 2$, то один корень: $|2x-5|=0$; $2x-5=0$; $x=2,5$.

Ответ: -2 ; 2 .

-
-
-

70. При каком значении параметра k корнями уравнения $|x+k-4|=5$ являются противоположные числа?

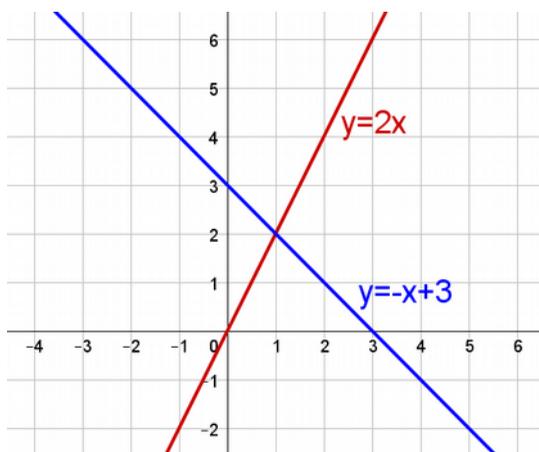
3. Линейная и квадратичная функции

Линейная функция — это функция вида $y=kx+b$, где k и b — заданные числа.

Графиком линейной функции $y=kx+b$ является прямая.

На плоскости возможны три случая взаимного расположения двух прямых.

1) Прямые пересекаются, имеют одну общую точку.
 $y=kx+b$; $y=nx+m$; $k \neq n$.

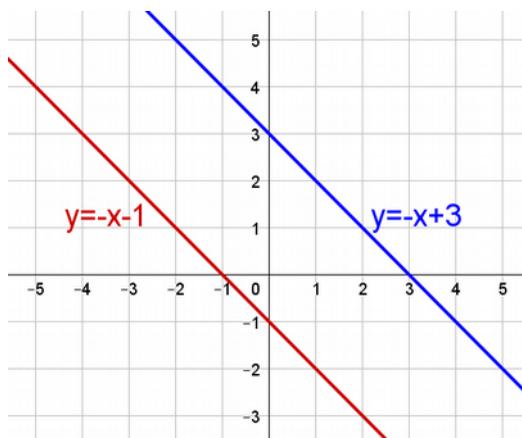


3. Линейная и квадратичная функции

Демо

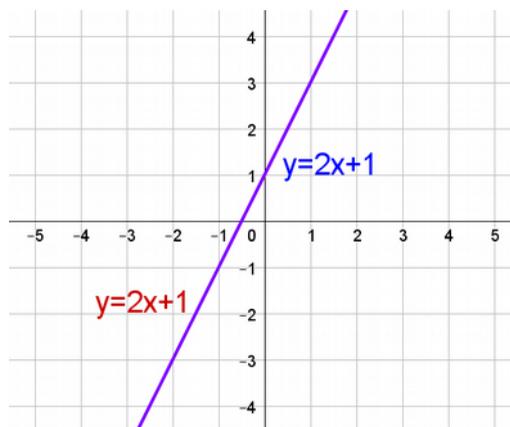
2) Прямые параллельны, не имеют общих точек.

$$y=kx+b; y=nx+m; k=n.$$



3) Прямые совпадают.

$$y=kx+b; y=nx+m; k=n; b=m.$$



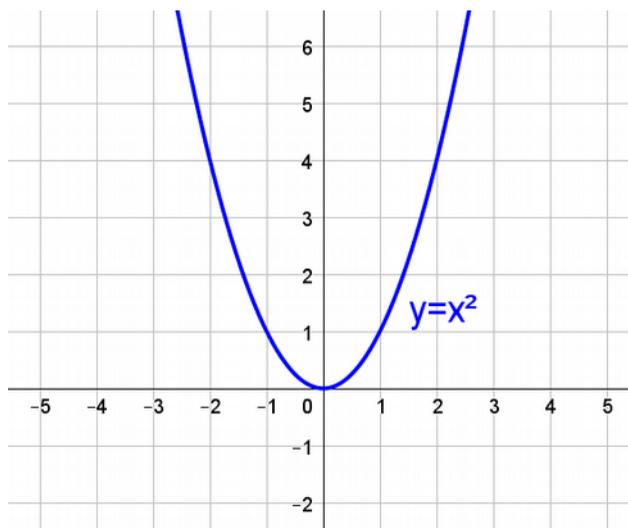
Квадратичная функция — это функция вида $y=ax^2+bx+c$, где a, b, c — заданные действительные числа, $a \neq 0$, x — действительная переменная.

Например: $y=x^2$; $y=-3x^2$; $y=x^2-x$; $y=-x^2+2x-1$.

Нули квадратичной функции — это такие значения x , при которых функция принимает значение, равное 0.

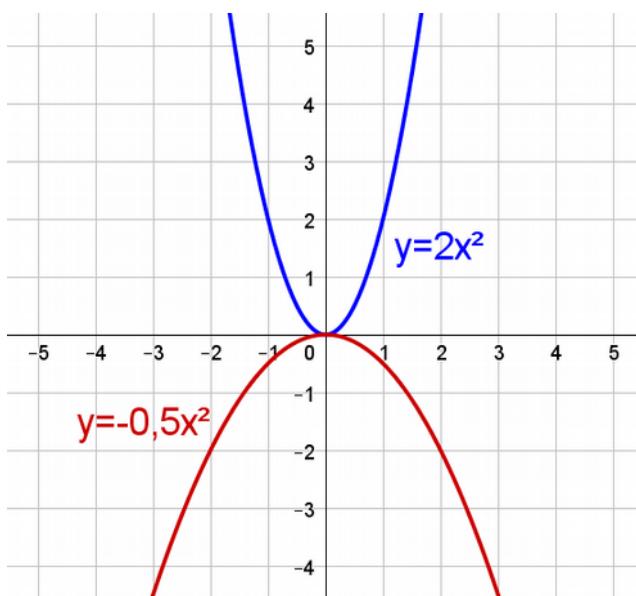
Функция $y=x^2$ — это квадратичная функция $y=ax^2+bx+c$ при $a=1, b=c=0$.

График функции $y=x^2$ — парабола.



Функция $y=ax^2$ — это квадратичная функция $y=ax^2+bx+c$ при $a \neq 0$, $b=c=0$.

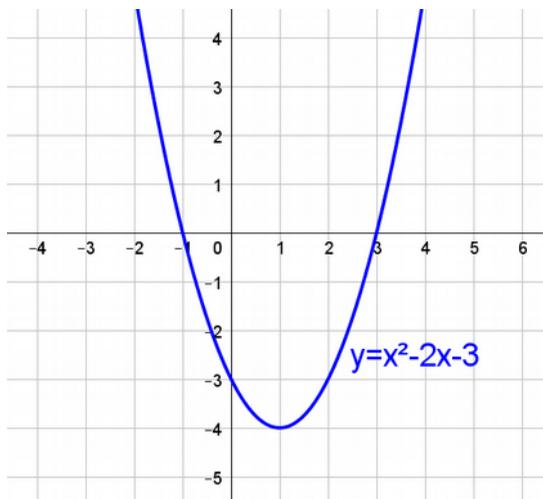
График функции $y=ax^2$ при любом $a \neq 0$ — парабола. При $a > 0$ ветви параболы направлены вверх, при $a < 0$ — вниз.



Функция $y=ax^2+bx+c$ — это квадратичная функция при $a \neq 0$.

График функции $y=ax^2+bx+c$ — парабола, получаемая сдвигом параболы $y=ax^2$ вдоль координатных осей.

Координаты $(x_0; y_0)$ вершины параболы $y=ax^2+bx+c$ можно найти по формулам: $x_0=-b/2a$; $y_0=y(x_0)=ax_0^2+bx_0+c$.



71. Прямая $y=kx-2b$ проходит через точку $A(2; -6)$ и параллельна прямой $2x-y=7$. Найдите коэффициенты k и b .

Решение.

Первая прямая $y=kx-2b$; $x=2$; $y=-6$;
 $-6=k \cdot 2 - 2b$; $2b=2k+6$; $b=k+3$.

Вторая прямая $2x-y=7$; $y=2x-7$.

Прямые $y=kx-2b$ и $y=2x-7$ параллельны, тогда $k=2$.

Если $k=2$, то $b=2+3$; $b=5$.

Прямые $y=2x-10$ и $y=2x-7$ параллельны.

Ответ: $k=2$; $b=5$.

-
-
-

90. При каких значениях параметра k вершина параболы $y=x^2+kx+25$ находится на оси абсцисс?

4. Системы уравнений

Решением системы двух уравнений с двумя неизвестными называют такую пару чисел x и y , которые при подстановке в эту систему обращают каждое её уравнение в верное равенство.

Решить систему уравнений — найти все её решения или установить, что их нет.

Решение системы уравнений:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0; \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases}$$

Если $a_1/a_2 = b_1/b_2 = c_1/c_2$, то система уравнений имеет бесконечное множество решений. Графическое решение: прямые совпадают.

Если $a_1/a_2 = b_1/b_2 \neq c_1/c_2$, то система уравнений противоречива, не имеет решений. Графическое решение: прямые параллельны.

Если $a_1/a_2 \neq b_1/b_2$, то система уравнений имеет единственное решение. Графическое решение: прямые пересекаются, имеют одну общую точку.

91. При каком значении k система уравнений

$$\begin{cases} (k+3) \cdot x - 4y = 3k - 5; \\ kx + (k-2) \cdot y = 3 \end{cases}$$

не имеет решений?

Решение.

Если $(k+3)/k = -4/(k-2) \neq (3k-5)/3$, то система уравнений не имеет решений.

$k \neq 0$; $k \neq 2$.

Из равенства $(k+3)/k = -4/(k-2)$ получаем:

$$(k+3)(k-2) = -4k;$$

$$k^2 + k - 6 + 4k = 0;$$

$$k^2 + 5k - 6 = 0;$$

$$k = 1; k = -6.$$

Проверка, удовлетворяют ли найденные значения второму условию: $-4/(k-2) \neq (3k-5)/3$.

Если $k=1$, то $-4/(-1) \neq (-2)/3$.

Если $k=-6$, то $-4/(-8) \neq (-2)/3$.

Ответ: 1; -6.

-
-
-

110. При каких значениях параметра a система уравнений $\{ax+4y=2a; x+ay=a$ имеет единственное решение? Найдите

это решение.

5. Неравенства с параметром

Решить неравенство с параметром — для любого допустимого значения параметра найти множество всех решений заданного неравенства.

Например, решение неравенства $ax < 2$:

если $a=0$ — x — любое число;

если $a>0$, то $x < 2/a$;

если $a<0$, то $x > 2/a$.

111. Решить неравенство: $5x - a > ax - 3$.

Решение.

$$5x - a > ax - 3;$$

$$(5 - a) \cdot x > a - 3.$$

Если $a=5$, то $0 \cdot x > 2$, решений нет;

если $5 - a > 0$, $a < 5$, то $x > (a - 3)/(5 - a)$;

если $5 - a < 0$, $a > 5$, то $x < (a - 3)/(5 - a)$.

Ответ: если $a < 5$, то $x > (a - 3)/(5 - a)$; если $a = 5$, то решений нет; если $a > 5$, то $x < (a - 3)/(5 - a)$.

-
-
-

130. При каком наименьшем целом значении параметра k неравенство $(k-1) \cdot x^2 - (k+1) \cdot x + k + 1 > 0$ справедливо при всех действительных значениях x ?

6. Задачи повышенной сложности

131. При каком значении параметра k сумма квадратов корней уравнения $x^2+x+k=0$ равна 13?

Решение.

По теореме Виета: $x_1+x_2=-1$, $x_1 \cdot x_2=k$.

Сумма квадратов корней уравнения:

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1 \cdot x_2=(-1)^2-2k=1-2k.$$

По условию $1-2k=13$, тогда $-2k=12$; $k=-6$.

Ответ: $k=-6$.

-
-
-

150. При каких значениях параметра k система уравнений $\{y=kx+3; (x-1)^2+y^2=4\}$ имеет единственное решение?

Решения и ответы

5. 1.

Привести уравнение к виду: $(k-1) \cdot x = k+1$.

Если $k \neq 1$, то $x = (k+1)/(k-1)$;

если $k=1$, то $0 \cdot x = 2$, решений нет.

6. -2.

Привести уравнение к виду: $(k+2) \cdot x = k-2$.

Если $k \neq -2$, то $x = (k-2)/(k+2)$;

если $k=-2$, то $0 \cdot x = -4$, решений нет.

7. $k \neq 5$.

$$kx - 1 = 5x + 3;$$

$$kx - 5x = 3 + 1;$$

$$(k-5) \cdot x = 4.$$

Если $k \neq 5$, то единственное решение: $x = 4/(k-5)$.

Если $k=5$, то $0 \cdot x = 4$, решений нет.

-
-
-

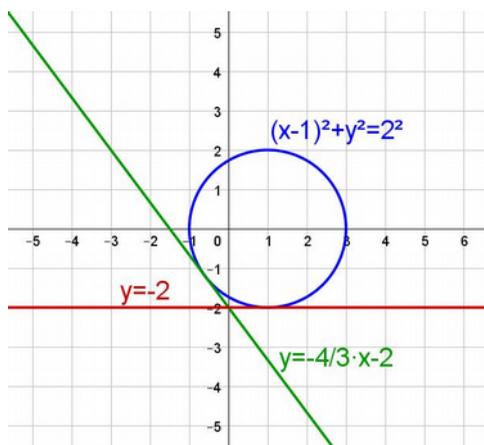
150. $k=0$; $k=-4/3$.

$$\{y = kx - 2; (x-1)^2 + y^2 = 4\};$$

$$\{y=kx-2; (x-1)^2+(kx-2)^2=4\}.$$

$$x^2-2x+1+k^2x^2-4kx+4=4;$$

$$(1+k^2)\cdot x^2-(2+4k)\cdot x+1=0.$$



Единственное решение уравнения $(1+k^2)\cdot x^2-(2+4k)\cdot x+1=0$ при $D=0$:

$$D=(2+4k)^2-4\cdot 1\cdot (1+k^2);$$

$$(2+4k)^2-4\cdot 1\cdot (1+k^2)=0;$$

$$4+16k+16k^2-4-4k^2=0;$$

$$16k+12k^2=0;$$

$$4k+3k^2=0;$$

$$k(4+3k)=0;$$

$$k=0; k=-4/3.$$

Если $k=0$, то прямая $y=-2$.

Если $k=-4/3$, то прямая $y=-4/3\cdot x-2$.

Электронные издания

([СМИ МетаШкола](#))

Задачи на числа

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на числа. 4 класс.
2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на числа. 5 класс.
3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на числа. 6 класс.
4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на числа. 7 класс.
5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на числа. 8 класс.
6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на числа. 9 класс.

Задачи на части, дроби, проценты и пропорции

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на части и дроби. 4 класс.
2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на части и дроби. 5 класс.
3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на дроби,

проценты и пропорции. 6 класс.

4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на дроби, проценты и пропорции. 7 класс.

5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на дроби, проценты и пропорции. 8 класс.

6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на дроби, проценты и пропорции. 9 класс.

Задачи на движение

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на движение. 4 класс.

2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на движение. 5 класс.

3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на движение. 6 класс.

4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на движение. 7 класс.

5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на движение. 8 класс.

6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на движение. 9 класс.

Задачи на работу

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на работу.

4 класс.

2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на работу.

5 класс.

3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на работу.

6 класс.

4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на работу.

7 класс.

5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на работу.

8 класс.

6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на работу.

9 класс.

Задачи по геометрии

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по геометрии.

4 класс.

2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по геометрии.

5 класс.

3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по геометрии.

6 класс.

4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по геометрии.

7 класс.

5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по геометрии.

8 класс.

6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по геометрии.

9 класс.

Задачи по комбинаторике

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по комбинаторике. 4 класс.
2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по комбинаторике. 5 класс.
3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по комбинаторике. 6 класс.
4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по комбинаторике. 7 класс.
5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по комбинаторике. 8 класс.
6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по комбинаторике. 9 класс.

Задачи по теории вероятностей

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории вероятностей. 4 класс.
2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории вероятностей. 5 класс.
3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории вероятностей. 6 класс.
4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории вероятностей. 7 класс.
5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории

вероятностей. 8 класс.

6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории вероятностей. 9 класс.

Задачи по теории множеств

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на множества. 4 класс.

2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на множества. 5 класс.

3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на множества. 6 класс.

4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на множества. 7 класс.

5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на множества. 8 класс.

6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на множества. 9 класс.

Задачи по теории графов

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории графов. 4 класс.

2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории графов. 5 класс.

3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории графов.

6 класс.

4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории графов.

7 класс.

5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории графов.

8 класс.

6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории графов.

9 класс.

Задачи на логику

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на логику. 4 класс.

2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на логику. 5 класс.

3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на логику. 6 класс.

4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на логику. 7 класс.

5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на логику. 8 класс.

6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на логику. 9 класс.

Задачи с параметрами

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи с параметрами.

6-7 классы.

2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи с параметрами.

8-9 классы.

Бумажные издания

([Издательство СМИО Пресс](#))

1 класс

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие игры. 1 класс

2 класс

2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие игры. 2 класс

3 класс

3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие игры. 3 класс

4 класс

4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие игры. 4 класс

5 класс

5. Смыкалова Е. В. Математика. Самостоятельные работы. 5 класс

6. Смыкалова Е. В. Математика. Сборник задач 5 класс

7. Смыкалова Е. В. Математика. Дополнительные главы 5 класс

8. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие игры 5 класс

5-6 классы

9. Смыкалова Е. В. Устный счёт в таблицах. 5-6 классы

10. Смыкалова Е. В. Математика. Опорные конспекты 5-6 классы

11. Смыкалова Е. В. Развивающее обучение на уроках математики в 5-6 классах. Программа, поурочное планирование, тесты

12. Смыкалова Е. В. Тренировка памяти и внимания на уроках математики 5-6 классы

13. Смыкалова Е. В. Устное умножение в таблицах. 5-6 классы

6 класс

14. Смыкалова Е. В. Математика. Сборник задач 6 класс

15. Смыкалова Е. В. Математика. Дополнительные главы 6 класс

16. Смыкалова Е. В. Математика. Самостоятельные работы. 6 класс

17. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие игры 6 класс

7 класс

18. Смыкалова Е. В. Математика. Сборник задач 7 класс
19. Смыкалова Е. В. Математика. Дополнительные главы 7 класс
20. Смыкалова Е. В. Алгебра. Самостоятельные работы. 7 класс.
21. Смыкалова Е. В. Самостоятельные работы по геометрии. 7 класс
22. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие игры. 7 класс

7-9 классы

23. Смыкалова Е. В. Алгебра. Опорные конспекты 7-9 классы
24. Смыкалова Е. В. Геометрия. Опорные конспекты 7-9 классы

8 класс

25. Смыкалова Е. В. Алгебра. Самостоятельные работы. 8 класс
26. Смыкалова Е. В. Геометрия. Самостоятельные работы. 8 класс
27. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие игры. 8 класс

8-9 классы

28. Смыкалова Е. В. Модули, параметры, многочлены.
8-9 классы

9 класс

29. Смыкалова Е. В. Самостоятельные работы по алгебре.
9 класс

30. Смыкалова Е. В. Самостоятельные работы по геометрии. 9 класс

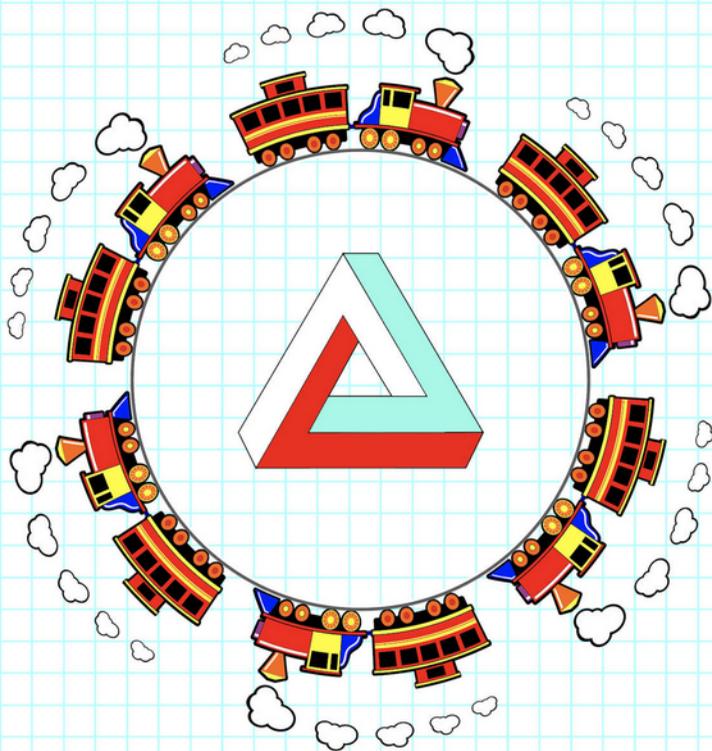
31. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие игры. 9 класс

Все классы

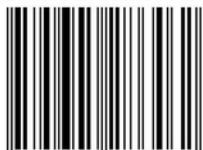
32. Смыкалова Е. В. Математические каникулы.

Увлекательные математические игры и головоломки

33. Смыкалова Е. В. Математические игры. На пляже, в пути, у камина



ISBN 978-5-6052864-6-2



9 785605 286462 >