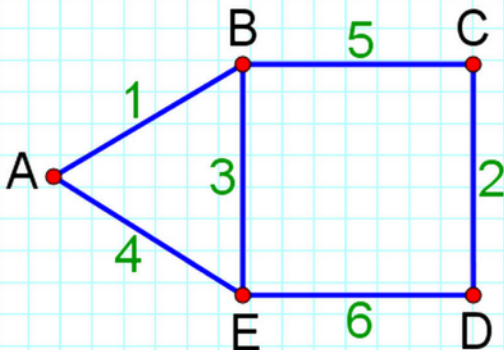


Е. В. Смыкалова

МАТЕМАТИКА

ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ГРАФОВ

	A	B	C	D	E
A		1			4
B	1		5		3
C		5		2	
D			2		6
E	4	3		6	



9

Е. В. Смыкалова

Математика
Задачи
по теории графов

9 класс

Демонверсия

Санкт-Петербург
СМИ МетаШкола
2024

УДК 373.51
ББК 20.я72

Смыкалова Елена Владимировна

С52

Математика. Задачи по теории графов.

9 класс: Сборник задач / Е. В. Смыкалова. – СПб.: СМИ
МетаШкола, 2024. – 127 с. – ISBN 978-5-6051895-8-9

Сборник содержит 130 задач по теории графов для 9 класса: задачи про вершины и рёбра графа, задачи на связанные и несвязные графы, задачи на уникальные графы, на ориентированные графы, на взвешенные графы. Приводятся образцы оформления для первых четырёх задач каждой главы. Ко всем задачам есть ответы и подробные решения в конце книги. Книга будет интересна и полезна ученикам 9 класса, их родителям и учителям математики.

ISBN 978-5-6051895-8-9

© Смыкалова Е. В., 2024

© СМИ МетаШкола, 2024

Все права защищены.

Эта книга, целиком или частично, не может быть использована или размещена где-либо в любой форме и с использованием любых технических средств без письменного разрешения владельца авторских прав. Нарушение прав преследуется по закону.

www.metaschool.ru

Оглавление

Предисловие.....	5
1. Вершины и рёбра графа.....	6
2. Связные и несвязные графы.....	16
3. Уникурсальные графы.....	25
4. Ориентированные графы.....	37
5. Взвешенные графы.....	51
6. Разные задачи на графы.....	67
Решения и ответы.....	74

Предисловие

Сборник содержит 130 задач по теории графов для 9 класса. В первой главе — задачи про вершины и рёбра графа; во второй главе — задачи на связанные и несвязные графы; в третьей — задачи на уникальные графы; в четвёртой — задачи на ориентированные графы; в пятой — задачи на взвешенные графы, в шестой — разные задачи на графы.

Рассматриваются различные способы решения задач. Приводятся образцы оформления для первых четырёх задач каждой главы. Ко всем задачам есть ответы и подробные решения в конце книги. Книга будет интересна и полезна ученикам 9 класса, их родителям и учителям математики.

Это шестая книга серии «Задачи по теории графов» 4 – 9 классы.

Материал книги был апробирован на уроках математики, на занятиях математического кружка в Физико-математическом лицее № 366 Санкт-Петербурга и в интернет-кружке МетаШколы www.metaschool.ru.

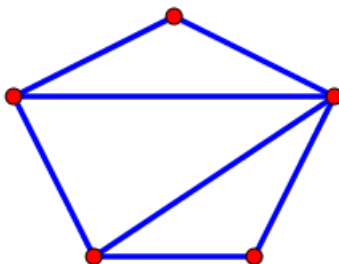
Желаем успехов в изучении математики!

1. Вершины и рёбра графа

Граф — это набор точек, некоторые из которых соединены линиями.

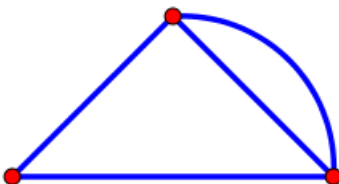
Эти точки называются *вершинами* графа, а соединяющие их линии — *рёбрами*.

Граф с 5 вершинами и 7 рёбрами:



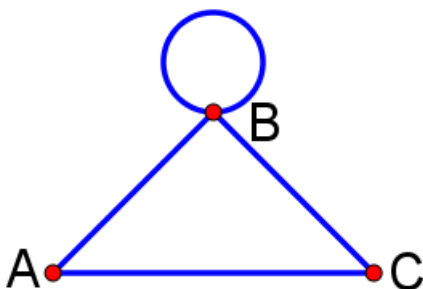
Два ребра называются *кратными*, если они соединяют одну и ту же пару вершин.

Граф с кратными рёбрами:



Петля — ребро, которое начинается и заканчивается в одной вершине.

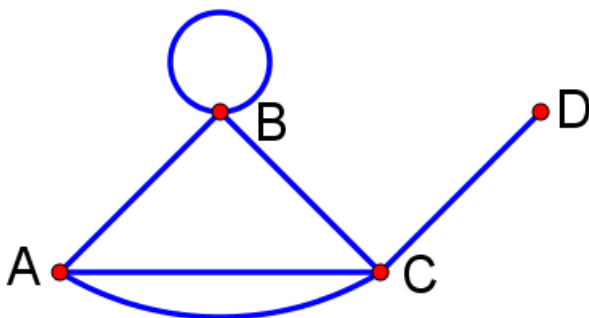
Граф с петлёй:



Число рёбер, выходящих из вершины графа, называется *степенью* этой вершины.

Степени вершин данного графа:

A — 3, B — 4, C — 4, D — 1.



Вершина называется *чётной*, если её степень чётна, и *нечётной*, если её степень нечётна.

Число нечётных вершин любого графа — чётно.

В любом графе сумма степеней всех вершин является чётным числом, она равна удвоенному числу рёбер. Для того, чтобы найти число рёбер графа, надо сложить степени всех вершин и полученный результат разделить на два.

Смежные вершины — это вершины, соединённые ребром.

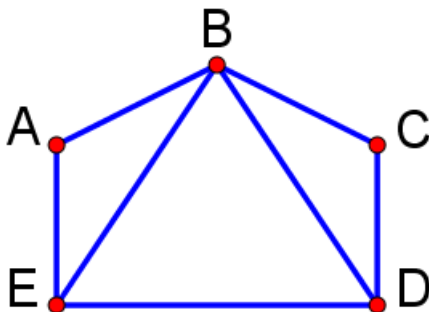
Пустой граф — не имеет рёбер, только вершины.

Простой граф — без кратных рёбер и петель.

Полный граф — это простой граф, в котором любые две вершины соединены ребром.

Число рёбер в полном графе с n вершинами равно:
 $(n - 1) \cdot n : 2$.

Матрица смежности графа:



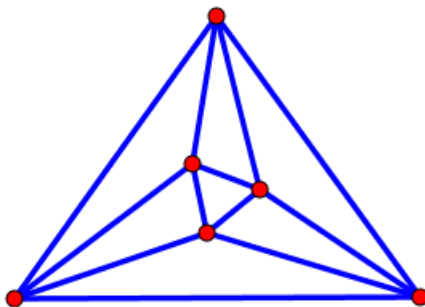
	A	B	C	D	E
A	1	1	0	0	1
B	1	1	1	1	1
C	0	1	1	1	0
D	0	1	1	1	1
E	1	1	0	1	1

Если вершины соединены ребром, то на пересечении строки и столбца стоит 1, если не соединены ребром — 0.

1. Можно ли построить граф с 6 вершинами так, чтобы степень каждой вершины была равна 4 и чтобы эти рёбра не пересекались?

Решение.

Да, например:



Из каждой вершины выходит 4 ребра, всего рёбер:

$$4 \cdot 6 : 2 = 12.$$

Построить граф можно.

Ответ: да.

-
-
-

26. Построить граф по матрице смежности:

	A	B	C	D	E
A		1	0	0	2
B	1		2	0	1
C	0	2		1	1
D	0	0	1		1
E	2	1	1	1	

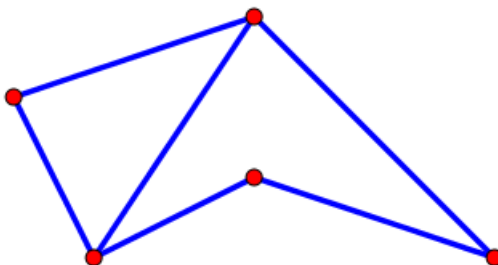
2. СВЯЗНЫЕ И НЕСВЯЗНЫЕ ГРАФЫ

Граф называется *связным*, если любые две его вершины можно соединить путём — непрерывной последовательностью рёбер.

В связном графе от любой его вершины можно по рёбрам добраться до любой другой вершины.

В связном графе только одна компонента связности.

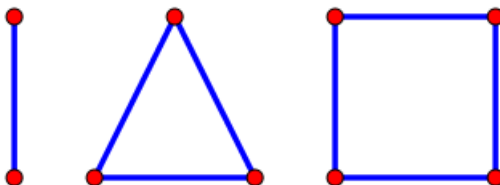
Связный граф с 5 вершинами и 6 рёбрами:



В *несвязном* графе более одной компоненты связности.

Каждая компонента связности является связным графом.

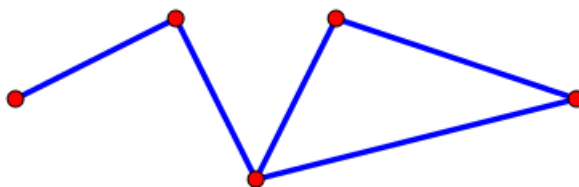
Например — несвязный граф с 9 вершинами и 8 рёбрами:



Если в связном графе n вершин, то число рёбер не менее, чем $(n - 1)$.

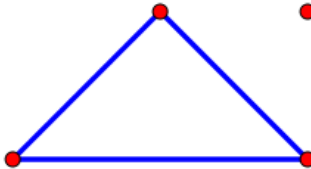
Цикл в графе — замкнутый путь, не проходящий дважды через одну и ту же вершину. Начальная вершина в цикле совпадает с конечной вершиной.

Граф с циклом с 5 вершинами и 5 рёбрами:



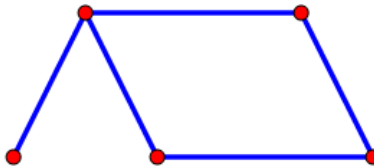
Вершина степени 0 называется *изолированной*, из неё не выходит ни одного ребра.

Граф с изолированной вершиной:



Вершина степени 1 называется *висячей*, из неё выходит ровно одно ребро.

Граф с висячей вершиной:

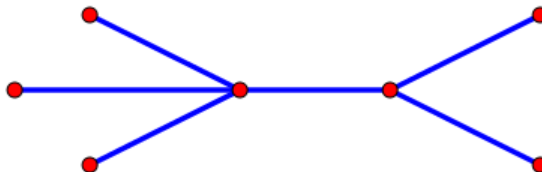


Дерево — связный граф без циклов.

У дерева число рёбер на единицу меньше числа вершин.

В любом дереве имеются, по крайней мере, две висячие вершины.

Дерево с 7 вершинами и 6 рёбрами:



27. Можно ли построить связный граф, в котором десять вершин степени 2 и шесть вершин степени 1?

Решение.

Всего вершин: $10 + 6 = 16$.

Всего рёбер: $(2 \cdot 10 + 1 \cdot 6) : 2 = 13$.

Если в связном графе 16 вершин, то число рёбер должно быть не меньше, чем $16 - 1 = 15$.

Нельзя построить связный граф, в котором 10 вершин степени 2 и 6 вершин степени 1.

Ответ: нет.

-
-
-

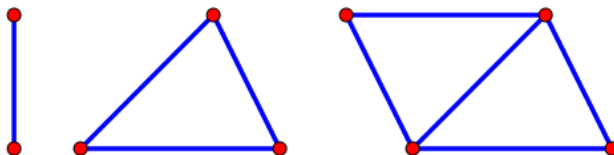
48. Построить граф по матрице смежности. Есть ли цикл в данном графе?

	A	B	C	D	E	F
A		0	1	1	0	0
B	0		0	1	1	1
C	1	0		1	0	0
D	1	1	1		0	0
E	0	1	0	0		1
F	0	1	0	0	1	

3. Уникурсальные графы

Уникурсальный граф — это связный граф, который можно построить одним росчерком, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя по одному ребру дважды.

Три уникурсальных графа:



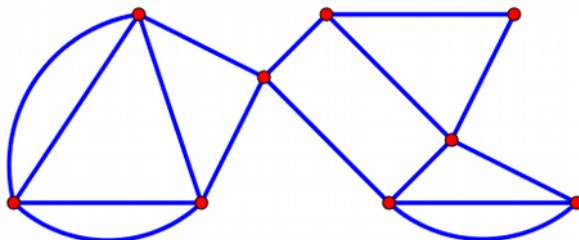
В уникурсальном графе может быть любое число чётных вершин, но не более двух нечётных.

Если только чётные вершины, то построение пути можно начинать с любой вершины и закончить его в той же вершине.

Если есть две нечётные вершины, то построение пути надо начинать с любой из нечётных вершин и закончить его в другой нечётной вершине.

Граф можно обойти, пройдя по каждому ребру только один раз в том случае, если граф связный и нечётных вершин у него 0 или 2.

49. Можно ли нарисовать фигуру, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя по одной линии дважды?



Решение.

Степени вершин: 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4. Две нечётные вершины. Можно нарисовать, начиная с одной нечётной вершины и заканчивая в другой нечётной вершине.

Ответ: да.

-
-
-

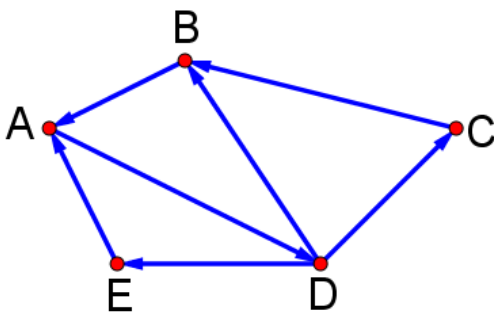
72. Построить граф по матрице смежности. Является ли данный граф уникурсальным?

	A	B	C	D	E	F
A		2	1	0	0	3
B	2		1	0	1	0
C	1	1		3	0	1
D	0	0	3		0	1
E	0	1	0	0		1
F	3	0	1	1	1	

4. Ориентированные графы

Ориентированный граф — это граф, в котором каждое ребро имеет направление, выбрано начало и конец ребра. Направленные рёбра называют также *дугами*.

Матрица смежности ориентированного графа:



	A	B	C	D	E
A	1	0	0	1	0
B	1	1	0	0	0
C	0	1	1	0	0
D	0	1	1	1	1
E	1	0	0	0	1

Сумма (по строкам) исходящих степеней всех вершин:
 $1 + 1 + 1 + 3 + 1 = 7$.

Сумма (по столбцам) входящих степеней всех вершин:
 $2 + 2 + 1 + 1 + 1 = 7$.

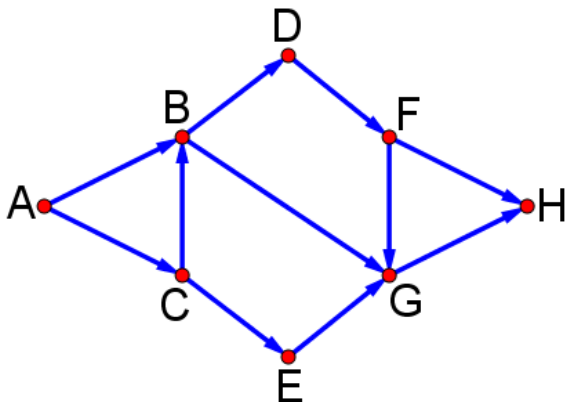
В данном графе 7 дуг.

Сумма исходящих степеней всех вершин равна сумме входящих степеней всех вершин: обе суммы равны числу рёбер графа.

Путь в ориентированном графе — это последовательность вершин, в которой из каждой вершины идёт ребро в следующую.

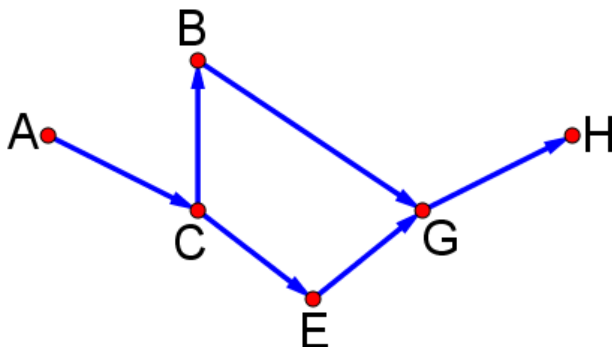
Простой путь в ориентированном графе — это путь, не проходящий дважды через одну вершину.

73. Районы города A, B, C, D, E, F, G, H связаны дорогами с односторонним движением. Сколько различных путей из A и H, проходящих через C, но не проходящих через F?



Решение.

Если убрать рёбра, которые не проходят через С и которые проходят через F, то получится граф:

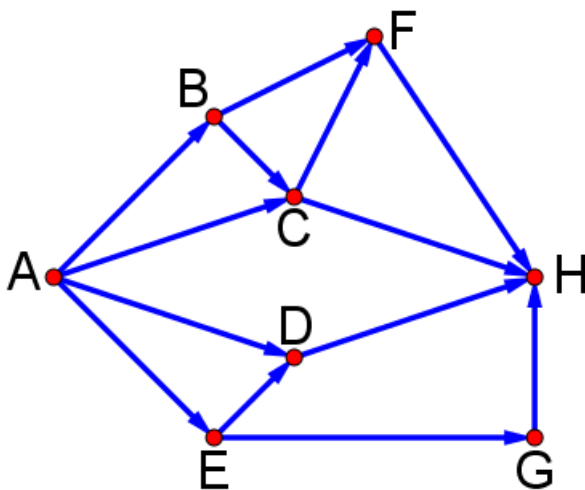


Два различных пути из А и Н: А-С-В-Г-Н; А-С-Е-Г-Н.

Ответ: 2.

-
-
-

92. Сколько в ориентированном графе различных путей из A в H?



5. Взвешенные графы

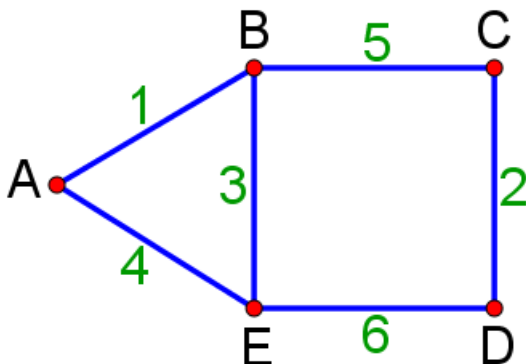
Взвешенный граф — это граф, в котором каждое ребро имеет числовое значение — вес.

Вес ребра может обозначать расстояние между населёнными пунктами, стоимость проезда, время в пути, стоимость строительства дорог и т. п.

Взвешенные графы бывают и неориентированными, и ориентированными.

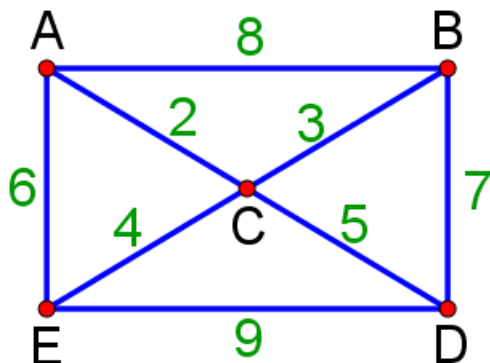
Вес графа — сумма весов всех рёбер, входящих в него.

Весовая матрица взвешенного графа:



	A	B	C	D	E
A		1			4
B	1		5		3
C		5		2	
D			2		6
E	4	3		6	

93. Постройте весовую матрицу данного графа:



Решение.

	A	B	C	D	E
A		8	2		6
B	8		3	7	
C	2	3		5	4
D		7	5		9
E	6		4	9	

•
•
•

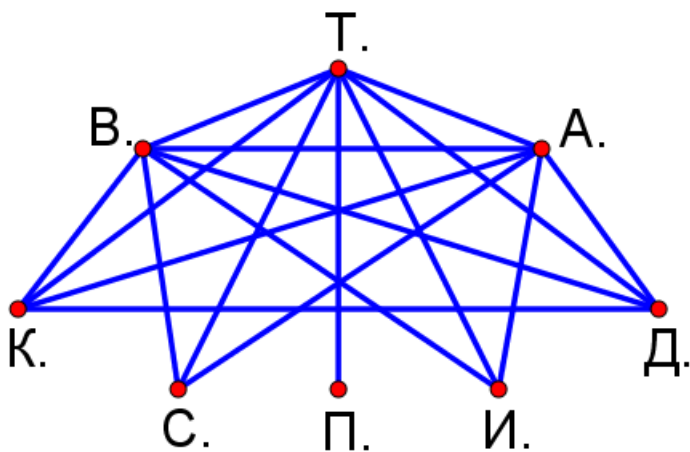
108. В таблице указано среднее время движения в часах на автобусе по дорогам между населёнными пунктами А, В, С, D, E, F. Найдите маршрут с наименьшим временем движения по этим дорогам из А в F.

	A	B	C	D	E	F
A		4				15
B	4		5			10
C		5		1	3	6
D			1		1	
E			3	1		2
F	15	10	6		2	

6. Разные задачи на графы

109. В шахматном турнире восемь участников. Каждые два участника за время турнира сыграли между собой не более одной партии. Известно, что Таня сыграла семь партий, Ваня и Аня — по шесть, Костя и Дима — по четыре, Саша и Ира — по три, Петя — одну. С кем играла Ира?

Решение.



Построить граф, где вершины — участники турнира, рёбра — партии.

Таня сыграла семь партий, провести семь рёбер от Тани к остальным семи участникам турнира.

Петя — одну партию, ребро от Тани до Пети уже есть.

Ваня и Аня — по шесть партий, провести рёбра ко всем, кроме Пети. Провести ребро от Кости до Димы.

Получилось Костя и Дима — по четыре, Саша и Ира — по три. Ира играла с Ваней, с Таней и с Аней.

Ответ: с Ваней, с Таней и с Аней.

-
-
-

130. Есть девять городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Два города соединены авиалинией только в том случае, если двузначное число, образованное названиями городов, делится на 3. Можно ли долететь с одной пересадкой из города 1 в город 4?

Решения и ответы

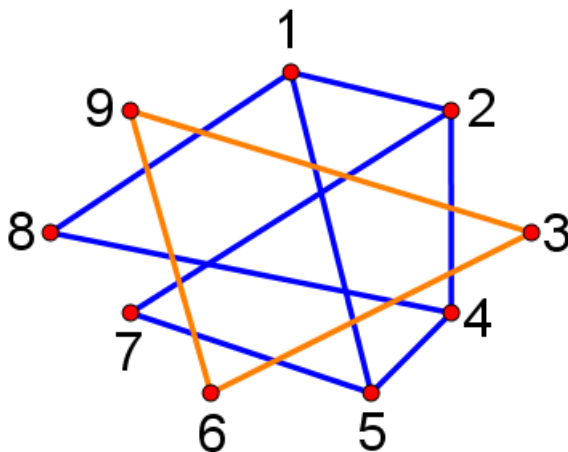
5. 11.

Для того, чтобы найти число рёбер графа, надо сложить степени всех вершин и полученный результат разделить на два.

Всего рёбер: $(1 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + 5) : 2 = 11$.

•
•
•

130. Да.



Пусть 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 — вершины графа.

Вершины соединяются ребром, если сумма цифр двузначного числа делится на 3.

Получился несвязный граф с двумя компонентами связности.

Вершины 1 и 4 принадлежат одной компоненте связности, долететь из города 1 в город 4 можно: 1-2-4; 1-5-4; 1-8-4.

Электронные издания

([СМИ МетаШкола](#))

Задачи на числа

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на числа. 4 класс.
2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на числа. 5 класс.
3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на числа. 6 класс.
4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на числа. 7 класс.
5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на числа. 8 класс.
6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на числа. 9 класс.

Задачи на части, дроби, проценты и пропорции

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на части и дроби. 4 класс.
2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на части и дроби. 5 класс.
3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на дроби,

проценты и пропорции. 6 класс.

4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на дроби, проценты и пропорции. 7 класс.

5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на дроби, проценты и пропорции. 8 класс.

6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на дроби, проценты и пропорции. 9 класс.

Задачи на движение

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на движение. 4 класс.

2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на движение. 5 класс.

3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на движение. 6 класс.

4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на движение. 7 класс.

5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на движение. 8 класс.

6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на движение. 9 класс.

Задачи на работу

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на работу.

4 класс.

2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на работу.

5 класс.

3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на работу.

6 класс.

4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на работу.

7 класс.

5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на работу.

8 класс.

6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на работу.

9 класс.

Задачи по геометрии

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по геометрии.

4 класс.

2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по геометрии.

5 класс.

3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по геометрии.

6 класс.

4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по геометрии.

7 класс.

5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по геометрии.

8 класс.

6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по геометрии.

9 класс.

Задачи по комбинаторике

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по комбинаторике. 4 класс.
2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по комбинаторике. 5 класс.
3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по комбинаторике. 6 класс.
4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по комбинаторике. 7 класс.
5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по комбинаторике. 8 класс.
6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по комбинаторике. 9 класс.

Задачи по теории вероятностей

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории вероятностей. 4 класс.
2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории вероятностей. 5 класс.
3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории вероятностей. 6 класс.
4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории вероятностей. 7 класс.
5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории

вероятностей. 8 класс.

6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории вероятностей. 9 класс.

Задачи по теории множеств

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на множества. 4 класс.

2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на множества. 5 класс.

3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на множества. 6 класс.

4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на множества. 7 класс.

5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на множества. 8 класс.

6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на множества. 9 класс.

Задачи по теории графов

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории графов. 4 класс.

2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории графов. 5 класс.

3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории графов.

6 класс.

4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории графов.
7 класс.

5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории графов.
8 класс.

6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории графов.
9 класс.

Бумажные издания

([Издательство СМИО Пресс](#))

1 класс

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие
игры. 1 класс

2 класс

2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие
игры. 2 класс

3 класс

3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие
игры. 3 класс

4 класс

4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие игры. 4 класс

5 класс

5. Смыкалова Е. В. Математика. Самостоятельные работы. 5 класс

6. Смыкалова Е. В. Математика. Сборник задач 5 класс

7. Смыкалова Е. В. Математика. Дополнительные главы 5 класс

8. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие игры 5 класс

5-6 классы

9. Смыкалова Е. В. Устный счёт в таблицах. 5-6 классы

10. Смыкалова Е. В. Математика. Опорные конспекты 5-6 классы

11. Смыкалова Е. В. Развивающее обучение на уроках математики в 5-6 классах. Программа, поурочное планирование, тесты

12. Смыкалова Е. В. Тренировка памяти и внимания на уроках математики 5-6 классы

13. Смыкалова Е. В. Устное умножение в таблицах. 5-6 классы

6 класс

- 14. Смыкалова Е. В. Математика. Сборник задач 6 класс
- 15. Смыкалова Е. В. Математика. Дополнительные главы 6 класс
- 16. Смыкалова Е. В. Математика. Самостоятельные работы. 6 класс
- 17. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие игры 6 класс

7 класс

- 18. Смыкалова Е. В. Математика. Сборник задач 7 класс
- 19. Смыкалова Е. В. Математика. Дополнительные главы 7 класс
- 20. Смыкалова Е. В. Алгебра. Самостоятельные работы. 7 класс.
- 21. Смыкалова Е. В. Самостоятельные работы по геометрии. 7 класс
- 22. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие игры. 7 класс

7-9 классы

- 23. Смыкалова Е. В. Алгебра. Опорные конспекты 7-9 классы
- 24. Смыкалова Е. В. Геометрия. Опорные конспекты 7-9 классы

8 класс

25. Смыкалова Е. В. Алгебра. Самостоятельные работы.
8 класс

26. Смыкалова Е. В. Геометрия. Самостоятельные работы.
8 класс

27. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие
игры. 8 класс

8-9 классы

28. Смыкалова Е. В. Модули, параметры, многочлены.
8-9 классы

9 класс

29. Смыкалова Е. В. Самостоятельные работы по алгебре.
9 класс

30. Смыкалова Е. В. Самостоятельные работы по
геометрии. 9 класс

31. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие
игры. 9 класс

Все классы

32. Смыкалова Е. В. Математические каникулы.

Увлекательные математические игры и головоломки

33. Смыкалова Е. В. Математические игры. На пляже,
в пути, у камина



	A	B	C	D	E
A		1			4
B	1		5		3
C		5		2	
D			2		6
E	4	3		6	

ISBN 978-5-6051895-8-9



9 785605 189589 >