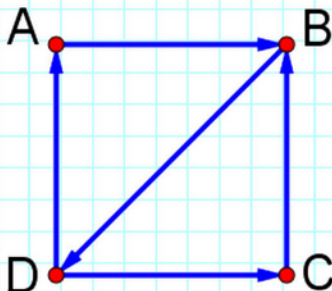


Е. В. Смыкалова

# МАТЕМАТИКА

## ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ГРАФОВ

|   | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| A |   | 1 | 0 | 0 |
| B | 0 |   | 0 | 1 |
| C | 0 | 1 |   | 0 |
| D | 1 | 0 | 1 |   |



Е. В. Смыкалова

Математика  
Задачи  
по теории графов

8 класс

Демонверсия

Санкт-Петербург  
СМИ МетаШкола  
2024

УДК 373.51  
ББК 20.я72

Смыкалова Елена Владимировна

C52

Математика. Задачи по теории графов.

8 класс: Сборник задач / Е. В. Смыкалова. – СПб.: СМИ  
МетаШкола, 2024. – 117 с. – ISBN 978-5-6051895-7-2

Сборник содержит 130 задач по теории графов для 8 класса: задачи про вершины и рёбра графа, задачи на связанные и несвязные графы, задачи на уникальные графы, на ориентированные графы, на взвешенные графы. Приводятся образцы оформления для первых четырёх задач каждой главы. Ко всем задачам есть ответы и подробные решения в конце книги. Книга будет интересна и полезна ученикам 8 класса, их родителям и учителям математики.

ISBN 978-5-6051895-7-2

© Смыкалова Е. В., 2024

© СМИ МетаШкола, 2024

Все права защищены.

Эта книга, целиком или частично, не может быть использована или размещена где-либо в любой форме и с использованием любых технических средств без письменного разрешения владельца авторских прав. Нарушение прав преследуется по закону.

[www.metaschool.ru](http://www.metaschool.ru)

---

## Оглавление

|                                   |    |
|-----------------------------------|----|
| Предисловие.....                  | 5  |
| 1. Вершины и рёбра графа.....     | 6  |
| 2. Связные и несвязные графы..... | 16 |
| 3. Уникурсальные графы.....       | 25 |
| 4. Ориентированные графы.....     | 37 |
| 5. Взвешенные графы.....          | 49 |
| 6. Разные задачи на графы.....    | 62 |
| Решения и ответы.....             | 69 |

## Предисловие

Сборник содержит 130 задач по теории графов для 8 класса. В первой главе — задачи про вершины и рёбра графа; во второй главе — задачи на связные и несвязные графы; в третьей — задачи на уникальные графы; в четвёртой — задачи на ориентированные графы; в пятой — задачи на взвешенные графы, в шестой — разные задачи на графы.

Рассматриваются различные способы решения задач. Приводятся образцы оформления для первых четырёх задач каждой главы. Ко всем задачам есть ответы и подробные решения в конце книги. Книга будет интересна и полезна ученикам 8 класса, их родителям и учителям математики.

Это пятая книга серии «Задачи по теории графов» 4 – 9 классы.

Материал книги был апробирован на уроках математики, на занятиях математического кружка в Физико-математическом лицее № 366 Санкт-Петербурга и в интернет-кружке МетаШколы [www.metaschool.ru](http://www.metaschool.ru).

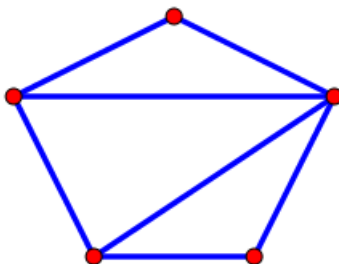
Желаем успехов в изучении математики!

## 1. Вершины и рёбра графа

*Граф* — это набор точек, некоторые из которых соединены линиями.

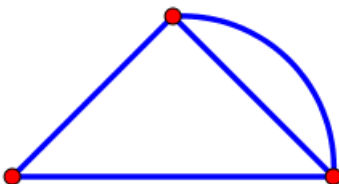
Эти точки называются *вершинами* графа, а соединяющие их линии — *рёбрами*.

Граф с 5 вершинами и 7 рёбрами:



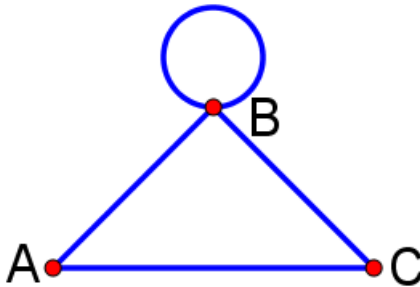
Два ребра называются *кратными*, если они соединяют одну и ту же пару вершин.

Граф с кратными рёбрами:



*Петля* — ребро, которое начинается и заканчивается в одной вершине.

Граф с петлёй:

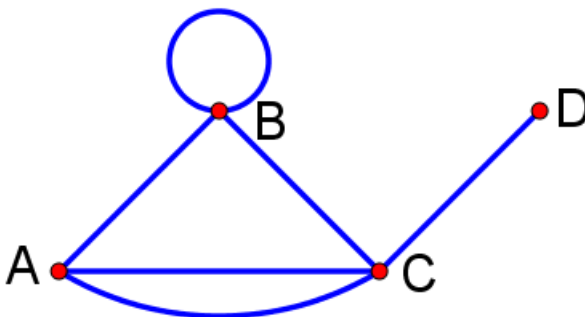


*Простой граф* — без кратных рёбер и петель.

Число рёбер, выходящих из вершины графа, называется *степенью* этой вершины.

Степени вершин данного графа:

A — 3, B — 4, C — 4, D — 1.



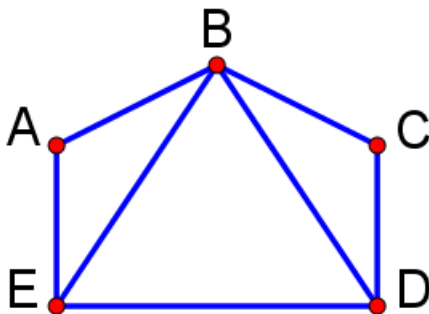
Вершина называется *чётной*, если её степень чётна, и *нечётной*, если её степень нечётна.

*Число нечётных вершин любого графа — чётно.*

В любом графе сумма степеней всех вершин является чётным числом, она равна удвоенному числу рёбер. Для того, чтобы найти число рёбер графа, надо сложить степени всех вершин и полученный результат разделить на два.

*Смежные вершины* — это вершины, соединённые ребром.

*Матрица смежности графа:*





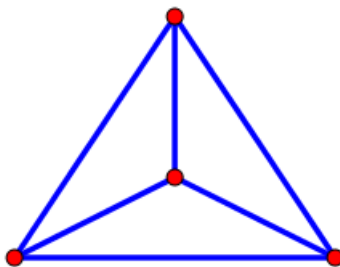
|   | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| A |   | 1 | 0 | 0 | 1 |
| B | 1 |   | 1 | 1 | 1 |
| C | 0 | 1 |   | 1 | 0 |
| D | 0 | 1 | 1 |   | 1 |
| E | 1 | 1 | 0 | 1 |   |

Если вершины соединены ребром, то на пересечении строки и столбца стоит 1, если не соединены ребром — 0.

1. Можно ли построить граф с 4 вершинами так, чтобы степень каждой вершины была равна 3 и чтобы эти рёбра не пересекались?

Решение.

Да, например:



Из каждой вершины выходит 3 ребра, всего рёбер:

$$4 \cdot 3 : 2 = 6.$$

Построить граф можно.

Ответ: да.

- 
- 
- 

26. Построить граф по матрице смежности:

|   | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| A |   | 1 | 0 | 1 | 0 |
| B | 1 |   | 1 | 1 | 0 |
| C | 0 | 1 |   | 1 | 1 |
| D | 1 | 1 | 1 |   | 1 |
| E | 0 | 0 | 1 | 1 |   |

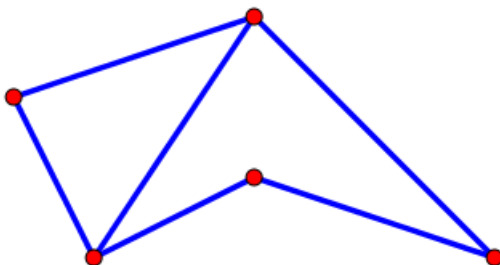
## 2. СВЯЗНЫЕ И НЕСВЯЗНЫЕ ГРАФЫ

Граф называется *связным*, если любые две его вершины можно соединить путём — непрерывной последовательностью рёбер.

В связном графе от любой его вершины можно по рёбрам добраться до любой другой вершины.

В связном графе только одна компонента связности.

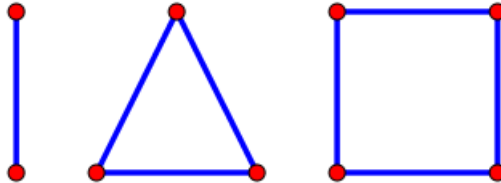
Связный граф с 5 вершинами и 6 рёбрами:



В *несвязном* графе более одной компоненты связности.

Каждая компонента связности является связным графом.

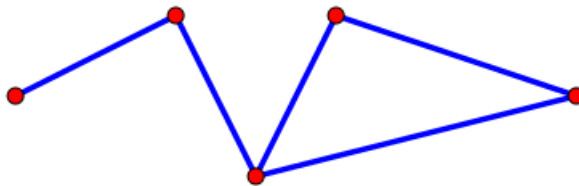
Например — несвязный граф с 9 вершинами и 8 рёбрами:



*Если в связном графе  $n$  вершин, то число рёбер не менее, чем  $(n - 1)$ .*

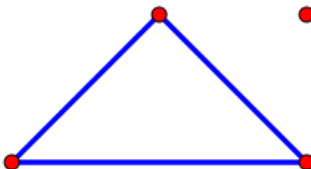
*Цикл* в графе — замкнутый путь, не проходящий дважды через одну и ту же вершину. Начальная вершина в цикле совпадает с конечной вершиной.

Граф с циклом с 5 вершинами и 5 рёбрами:



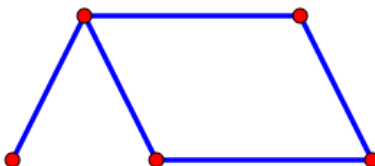
Вершина степени 0 называется *изолированной*, из неё не выходит ни одного ребра.

Граф с изолированной вершиной:



Вершина степени 1 называется *висячей*, из неё выходит ровно одно ребро.

Граф с висячей вершиной:

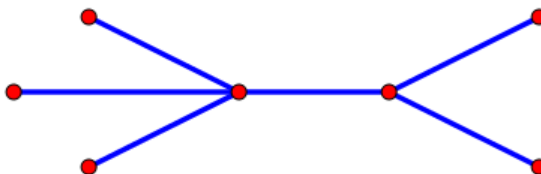


*Дерево* — связный граф без циклов.

У дерева число рёбер на единицу меньше числа вершин.

В любом дереве имеются, по крайней мере, две висячие вершины.

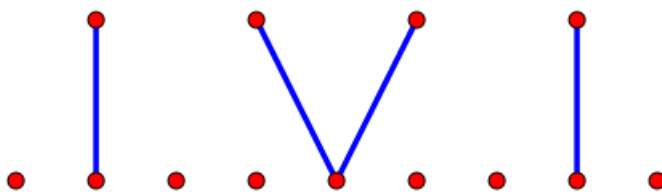
Дерево с 7 вершинами и 6 рёбрами:



27. Можно ли построить несвязный граф с 13 вершинами и 4 рёбрами?

Решение.

Да, например:



Ответ: да.

- 
- 
-

48. Построить граф по матрице смежности:

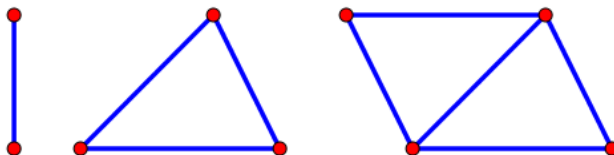
|   | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A |   | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| B | 1 |   | 1 | 0 | 0 | 1 |
| C | 1 | 1 |   | 0 | 0 | 0 |
| D | 0 | 0 | 0 |   | 1 | 1 |
| E | 0 | 0 | 0 | 1 |   | 1 |
| F | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |   |

Есть ли цикл в данном графе?

### 3. Уникурсальные графы

*Уникурсальный граф* — это связный граф, который можно построить одним росчерком, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя по одному ребру дважды.

Три уникурсальных графа:



*В уникурсальном графе может быть любое число чётных вершин, но не более двух нечётных.*

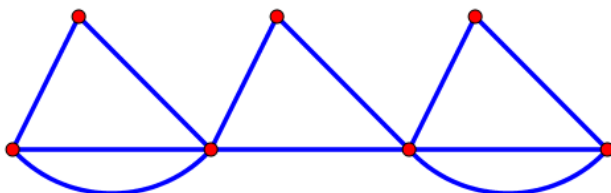
Если только чётные вершины, то построение пути можно начинать с любой вершины и закончить его в той же вершине.

Если есть две нечётные вершины, то построение пути надо начинать с любой из нечётных вершин и закончить его в другой нечётной вершине.

Граф можно обойти, пройдя по каждому ребру только один раз в том случае, если граф связный и нечётных вершин у него 0 или 2.



49. Можно ли нарисовать фигуру, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя по одной линии дважды?



Решение.

Степени вершин: 2, 2, 2, 3, 3, 5, 5. Четыре нечётные вершины. Нельзя нарисовать фигуру, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя по одной линии дважды  
Ответ: нет.

- 
- 
- 

72. Степени вершин уникурсального графа:

4, 4, 5,  $x$ ,  $x$ ,  $x$ ,  $(x + 1)$ .

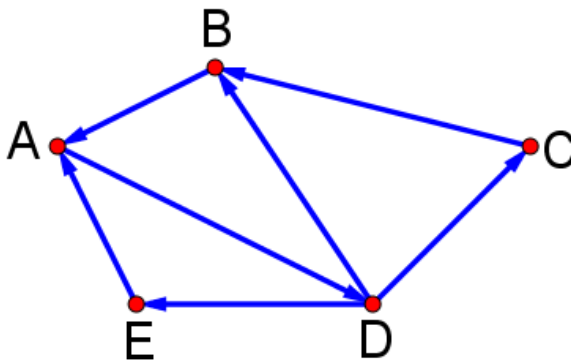
Сумма степеней всех вершин не менее 18 и не более 26.

Найдите значение  $x$ .

## 4. Ориентированные графы

*Ориентированный граф* — это граф, в котором каждое ребро имеет направление, выбрано начало и конец ребра. Направленные рёбра называют также *дугами*.

*Матрица смежности* ориентированного графа:



|   | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| A |   | 0 | 0 | 1 | 0 |
| B | 1 |   | 0 | 0 | 0 |
| C | 0 | 1 |   | 0 | 0 |
| D | 0 | 1 | 1 |   | 1 |
| E | 1 | 0 | 0 | 0 |   |

Сумма (по строкам) исходящих степеней всех вершин:  
 $1 + 1 + 1 + 3 + 1 = 7$ .

Сумма (по столбцам) входящих степеней всех вершин:  
 $2 + 2 + 1 + 1 + 1 = 7$ .

В данном графе 7 дуг.

*Сумма исходящих степеней всех вершин равна сумме входящих степеней всех вершин: обе суммы равны числу рёбер графа.*

*Путь* в ориентированном графе — это последовательность вершин, в которой из каждой вершины идёт ребро в следующую.

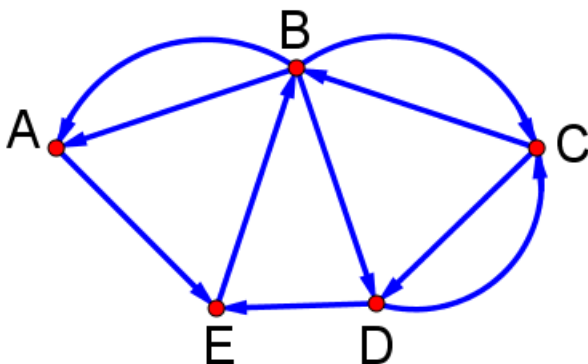
*Простой путь* в ориентированном графе — это путь, не проходящий дважды через одну вершину.

73. Построить ориентированный граф по матрице смежности:

|   | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| A |   | 0 | 0 | 0 | 1 |
| B | 2 |   | 1 | 1 | 0 |
| C | 0 | 1 |   | 1 | 0 |
| D | 0 | 0 | 1 |   | 1 |
| E | 0 | 1 | 0 | 0 |   |

Сколько дуг в данном графе?

Решение.



Сумма (по строкам) исходящих степеней всех вершин:  
 $1 + 4 + 2 + 2 + 1 = 10$ .

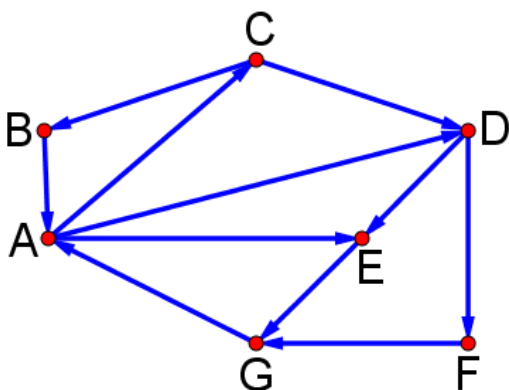
Сумма (по столбцам) входящих степеней всех вершин:  
 $2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$ .

В данном графе 10 дуг.

Ответ: 10.

- 
- 
-

92. Сколько в ориентированном графе различных путей из A в G?



## 5. Взвешенные графы

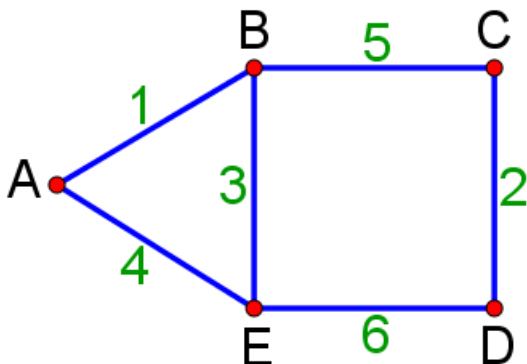
*Взвешенный граф* — это граф, в котором каждое ребро имеет числовое значение — вес.

*Вес ребра* может обозначать расстояние между населёнными пунктами, стоимость проезда, время в пути, стоимость строительства дорог и т. п.

Взвешенные графы бывают и неориентированными, и ориентированными.

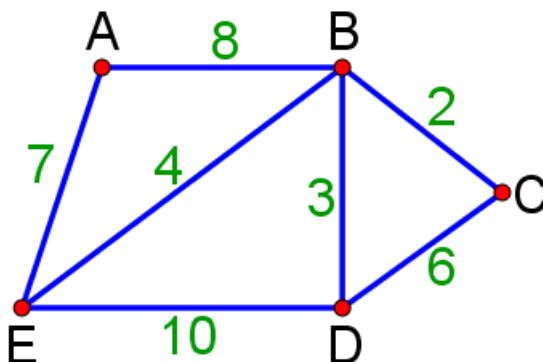
*Вес графа* — сумма весов всех рёбер, входящих в него.

Весовая матрица взвешенного графа:



|   | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| A |   | 1 |   |   | 4 |
| B | 1 |   | 5 |   | 3 |
| C |   | 5 |   | 2 |   |
| D |   |   | 2 |   | 6 |
| E | 4 | 3 |   | 6 |   |

93. Постройте весовую матрицу данного графа:



Решение.

|   | A | B | C | D  | E  |
|---|---|---|---|----|----|
| A |   | 8 |   |    | 7  |
| B | 8 |   | 2 | 3  | 4  |
| C |   | 2 |   | 6  |    |
| D |   | 3 | 6 |    | 10 |
| E | 7 | 4 |   | 10 |    |

•  
•  
•



108. В таблице указано среднее время движения в часах на автобусе по дорогам между населёнными пунктами А, В, С, D, E, F. Найдите маршрут с наименьшим временем движения по этим дорогам из А в F.

|   | A  | B | C | D | E | F  |
|---|----|---|---|---|---|----|
| A |    | 3 |   |   |   | 13 |
| B | 3  |   | 5 |   |   |    |
| C |    | 5 |   | 2 | 2 | 4  |
| D |    |   | 2 |   | 1 |    |
| E |    |   | 2 | 1 |   | 1  |
| F | 13 |   | 4 |   | 1 |    |

## 6. Разные задачи на графы

109. Трое друзей играли в шашки. Один из них сыграл 18 партий, а другой — 13 партий. Мог ли третий участник сыграть 21 партию?

Решение.

Да, например, первый с третьим сыграли 13 партий, второй с третьим — 8 партий, первый со вторым — 5 партий.

Всего третий сыграл:  $13 + 8 = 21$  партию.

Ответ: да.

- 
- 
- 

130. Можно ли построить граф, в котором будут только вершины степени 5 и 6, а число рёбер будет равно 19?

## Решения и ответы

5. 8.

Для того, чтобы найти число рёбер графа, надо сложить степени всех вершин и полученный результат разделить на два. Всего рёбер:  $(1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 5) : 2 = 8$ .

6. 11.

Для того, чтобы найти число рёбер графа, надо сложить степени всех вершин и полученный результат разделить на два. Всего рёбер:  $(1 + 3 + 3 + 5 + 5 + 5) : 2 = 11$ .

- 
- 
- 

130. Да.

Пусть  $x$  вершин степени 5,  $y$  вершин степени 6.

$$(5x + 6y) : 2 = 19;$$

$$5x + 6y = 38.$$

Решим перебором натуральных значений, получаем  $x = 4$ ,  
 $y = 3$ .

$$5 \cdot 4 + 6 \cdot 3 = 38.$$

Ответ: да.

---

## **Электронные издания**

([СМИ МетаШкола](#))

### **Задачи на числа**

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на числа. 4 класс.
2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на числа. 5 класс.
3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на числа. 6 класс.
4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на числа. 7 класс.
5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на числа. 8 класс.
6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на числа. 9 класс.

### **Задачи на части, дроби, проценты и пропорции**

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на части и дроби. 4 класс.
2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на части и дроби. 5 класс.
3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на дроби,

- 
- проценты и пропорции. 6 класс.
4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на дроби, проценты и пропорции. 7 класс.
5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на дроби, проценты и пропорции. 8 класс.
6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на дроби, проценты и пропорции. 9 класс.

### **Задачи на движение**

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на движение. 4 класс.
2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на движение. 5 класс.
3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на движение. 6 класс.
4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на движение. 7 класс.
5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на движение. 8 класс.
6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на движение. 9 класс.

### **Задачи на работу**

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на работу.

---

4 класс.

2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на работу.

5 класс.

3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на работу.

6 класс.

4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на работу.

7 класс.

5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на работу.

8 класс.

6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на работу.

9 класс.

## **Задачи по геометрии**

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по геометрии.

4 класс.

2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по геометрии.

5 класс.

3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по геометрии.

6 класс.

4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по геометрии.

7 класс.

5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по геометрии.

8 класс.

6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по геометрии.

9 класс.

---

## **Задачи по комбинаторике**

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по комбинаторике. 4 класс.
2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по комбинаторике. 5 класс.
3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по комбинаторике. 6 класс.
4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по комбинаторике. 7 класс.
5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по комбинаторике. 8 класс.
6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по комбинаторике. 9 класс.

## **Задачи по теории вероятностей**

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории вероятностей. 4 класс.
2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории вероятностей. 5 класс.
3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории вероятностей. 6 класс.
4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории вероятностей. 7 класс.
5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории

---

вероятностей. 8 класс.

6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории вероятностей. 9 класс.

### **Задачи по теории множеств**

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на множества. 4 класс.

2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на множества. 5 класс.

3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на множества. 6 класс.

4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на множества. 7 класс.

5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на множества. 8 класс.

6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на множества. 9 класс.

### **Задачи по теории графов**

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории графов. 4 класс.

2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории графов. 5 класс.

3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории графов.



---

6 класс.

4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории графов.

7 класс.

5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории графов.

8 класс.

## **Бумажные издания**

([Издательство СМАО Пресс](#))

### **1 класс**

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие игры. 1 класс

### **2 класс**

2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие игры. 2 класс

### **3 класс**

3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие игры. 3 класс

### **4 класс**

4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие игры. 4 класс

---

## **5 класс**

- 5. Смыкалова Е. В. Математика. Самостоятельные работы. 5 класс
- 6. Смыкалова Е. В. Математика. Сборник задач 5 класс
- 7. Смыкалова Е. В. Математика. Дополнительные главы 5 класс
- 8. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие игры 5 класс

## **5-6 классы**

- 9. Смыкалова Е. В. Устный счёт в таблицах. 5-6 классы
- 10. Смыкалова Е. В. Математика. Опорные конспекты 5-6 классы
- 11. Смыкалова Е. В. Развивающее обучение на уроках математики в 5-6 классах. Программа, поурочное планирование, тесты
- 12. Смыкалова Е. В. Тренировка памяти и внимания на уроках математики 5-6 классы
- 13. Смыкалова Е. В. Устное умножение в таблицах. 5-6 классы

## **6 класс**

- 14. Смыкалова Е. В. Математика. Сборник задач 6 класс
- 15. Смыкалова Е. В. Математика. Дополнительные главы 6 класс

---

16. Смыкалова Е. В. Математика. Самостоятельные работы. 6 класс

17. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие игры 6 класс

## **7 класс**

18. Смыкалова Е. В. Математика. Сборник задач 7 класс

19. Смыкалова Е. В. Математика. Дополнительные главы 7 класс

20. Смыкалова Е. В. Алгебра. Самостоятельные работы. 7 класс.

21. Смыкалова Е. В. Самостоятельные работы по геометрии. 7 класс

22. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие игры. 7 класс

## **7-9 классы**

23. Смыкалова Е. В. Алгебра. Опорные конспекты 7-9 классы

24. Смыкалова Е. В. Геометрия. Опорные конспекты 7-9 классы

## **8 класс**

25. Смыкалова Е. В. Алгебра. Самостоятельные работы. 8 класс

---

26. Смыкалова Е. В. Геометрия. Самостоятельные работы.  
8 класс

27. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие  
игры. 8 класс

### **8-9 классы**

28. Смыкалова Е. В. Модули, параметры, многочлены.  
8-9 классы

### **9 класс**

29. Смыкалова Е. В. Самостоятельные работы по алгебре.  
9 класс

30. Смыкалова Е. В. Самостоятельные работы по  
геометрии. 9 класс

31. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие  
игры. 9 класс

### **Все классы**

32. Смыкалова Е. В. Математические каникулы.

Увлекательные математические игры и головоломки

33. Смыкалова Е. В. Математические игры. На пляже,  
в пути, у камина



|   | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| A |   | 1 | 0 | 0 |
| B | 0 |   | 0 | 1 |
| C | 0 | 1 |   | 0 |
| D | 1 | 0 | 1 |   |

ISBN 978-5-6051895-7-2



9 785605 189572 >