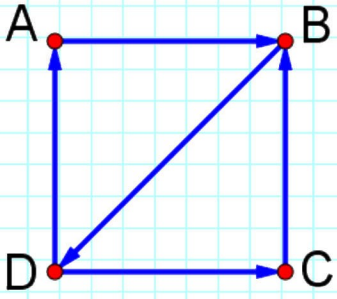
Е. В. Смыкалова

МАТЕМАТИКА

ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ГРАФОВ

	A	B	C	D
A		1	0	0
B	0		0	1
C	0	1		0
D	1	0	1	



8

Е. В. Смыкалова

Математика
Задачи
по теории графов

8 класс

Демоверсия

Санкт-Петербург
СМИ МетаШкола
2024

УДК 373.51
ББК 20.я72

Смыкалова Елена Владимировна

С52 Математика. Задачи по теории графов.
8 класс: Сборник задач / Е. В. Смыкалова. – СПб.: СМИ МетаШкола, 2024. – 117 с. – ISBN 978-5-6051895-7-2

Сборник содержит 130 задач по теории графов для 8 класса: задачи про вершины и рёбра графа, задачи на связные и несвязные графы, задачи на уникурсальные графы, на ориентированные графы, на взвешенные графы. Приводятся образцы оформления для первых четырёх задач каждой главы. Ко всем задачам есть ответы и подробные решения в конце книги. Книга будет интересна и полезна ученикам 8 класса, их родителям и учителям математики.

ISBN 978-5-6051895-7-2
© Смыкалова Е. В., 2024
© СМИ МетаШкола, 2024

Все права защищены.
Эта книга, целиком или частично, не может быть использована или размещена где-либо в любой форме и с использованием любых технических средств без письменного разрешения владельца авторских прав. Нарушение прав преследуется по закону.

www.metaschool.ru

Оглавление

Предисловие.....5

1. Вершины и рёбра графа.....6

2. Связные и несвязные графы.....16

3. Уникурсальные графы.....25

4. Ориентированные графы.....37

5. Взвешенные графы.....49

6. Разные задачи на графы.....62

Решения и ответы.....69

Предисловие

Сборник содержит 130 задач по теории графов для 8 класса. В первой главе — задачи про вершины и рёбра графа; во второй главе — задачи на связные и несвязные графы; в третьей — задачи на уникурсальные графы; в четвёртой — задачи на ориентированные графы; в пятой — задачи на взвешенные графы, в шестой — разные задачи на графы.

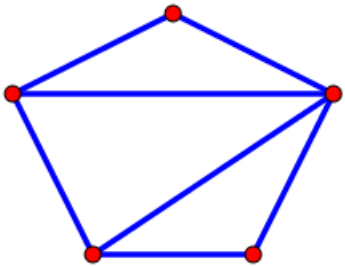
Рассматриваются различные способы решения задач. Приводятся образцы оформления для первых четырёх задач каждой главы. Ко всем задачам есть ответы и подробные решения в конце книги. Книга будет интересна и полезна ученикам 8 класса, их родителям и учителям математики.

Это пятая книга серии «Задачи по теории графов» для 4–9 классов.
Материал книги был апробирован на уроках математики, на занятиях математического кружка в Физико-математическом лицее № 366 Санкт-Петербурга и в интернет-кружке МетаШколы www.metaschool.ru.

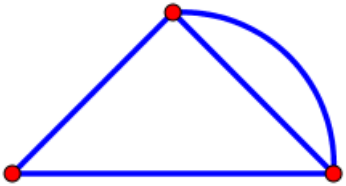
Желаем успехов в изучении математики!

1. Вершины и рёбра графа

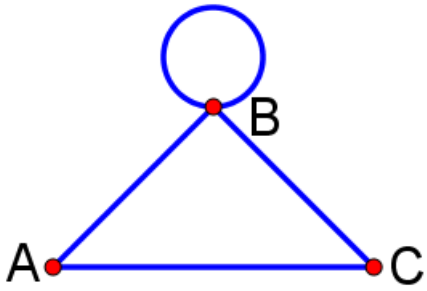
Граф — это набор точек, некоторые из которых соединены линиями.
Эти точки называются *вершинами* графа, а соединяющие их линии — *рёбрами*.
Граф с 5 вершинами и 7 рёбрами:



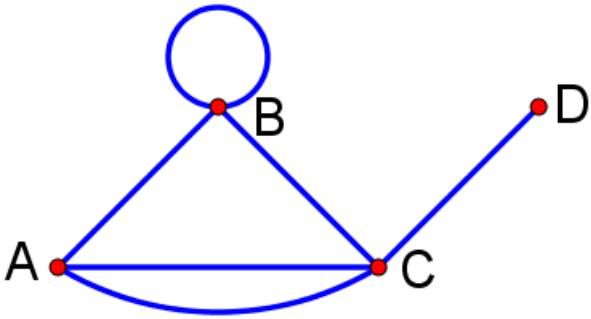
Два ребра называются *кратными*, если они соединяют одну и ту же пару вершин.
Граф с кратными рёбрами:



Петля — ребро, которое начинается и заканчивается в одной вершине.
Граф с петлёй:



Степень вершины — число концов рёбер, инцидентных этой вершине; петля учитывается дважды.
Степени вершин данного графа:
A — 3, B — 4, C — 4, D — 1.



Вершина называется *чётной*, если её степень чётна, и *нечётной*, если её степень нечётна.

Число нечётных вершин любого графа — чётно.

В любом графе сумма степеней всех вершин является чётным числом, она равна удвоенному числу рёбер. Для того, чтобы найти число рёбер графа, надо сложить степени всех вершин и полученный результат разделить на два.

Смежные вершины — это вершины, соединённые ребром.

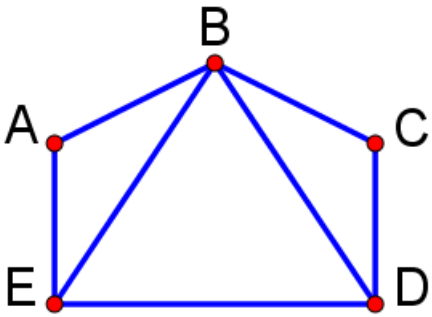
Пустой граф — не имеет рёбер, только вершины.

Простой граф — без кратных рёбер и петель.

Полный граф — это простой граф, в котором любые две вершины соединены ребром.

Число рёбер в полном графе с n вершинами равно:
$(n - 1) \cdot n : 2$.

Матрица смежности графа:



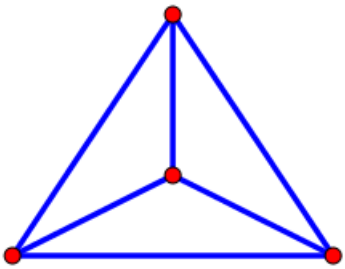
	A	B	C	D	E
A		1	0	0	1
B	1		1	1	1
C	0	1		1	0
D	0	1	1		1
E	1	1	0	1	

Если вершины соединены ребром, то на пересечении строки и столбца стоит 1, если не соединены ребром — 0.

1. Можно ли построить граф с 4 вершинами так, чтобы степень каждой вершины была равна 3 и чтобы эти рёбра не пересекались?

Решение.

Да, например:



Из каждой вершины выходит 3 ребра, всего рёбер:
$3 \cdot 4 : 2 = 6$.
Построить граф можно.
Ответ: да.

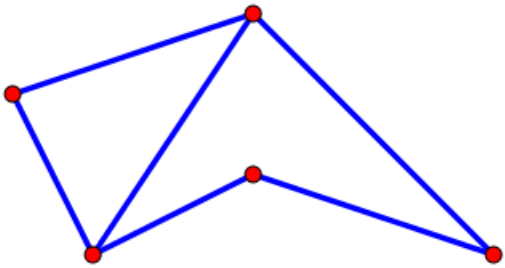
-
-
-

26. Построить граф по матрице смежности:

	A	B	C	D	E
A		1	0	1	0
B	1		1	1	0
C	0	1		1	1
D	1	1	1		1
E	0	0	1	1	

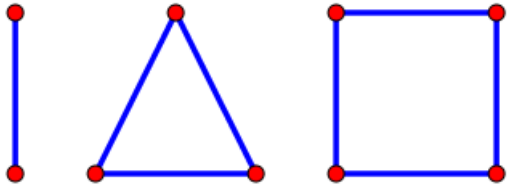
2. Связные и несвязные графы

Граф называется *связным*, если любые две его вершины можно соединить путём — непрерывной последовательностью рёбер.
В связном графе от любой его вершины можно по рёбрам добраться до любой другой вершины.
В связном графе только одна компонента связности.
Связный граф с 5 вершинами и 6 рёбрами:



В *несвязном* графе более одной компоненты связности.
Каждая компонента связности является связным графом.

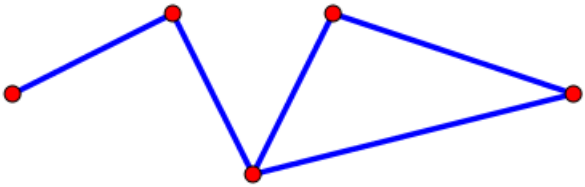
Например — несвязный граф с 9 вершинами и 8 рёбрами:



Если в связном графе n вершин, то число рёбер не менее чем (n – 1).

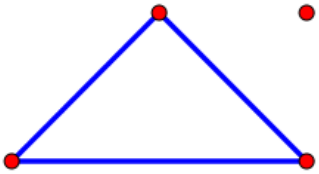
Цикл в графе — замкнутый путь, не проходящий дважды через одну и ту же вершину. Начальная вершина в цикле совпадает с конечной вершиной.

Граф с 5 вершинами, 5 рёбрами и циклом:



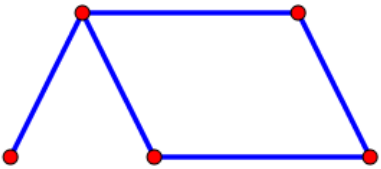
Вершина степени 0 называется *изолированной*, из неё не выходит ни одного ребра.

Граф с изолированной вершиной:

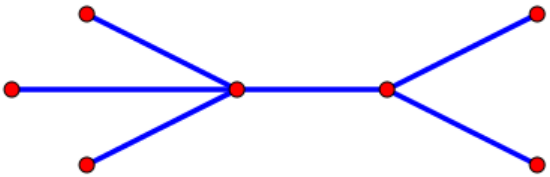


Вершина степени 1 называется *висячей*, из неё выходит ровно одно ребро.

Граф с висячей вершиной:



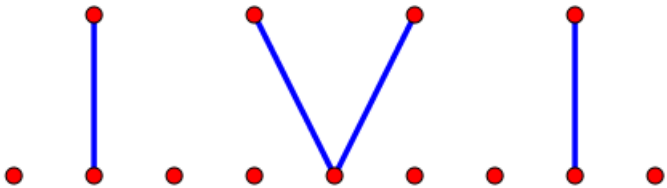
Дерево — связный граф без циклов.
У дерева число рёбер на единицу меньше числа вершин.
В любом дереве имеются, по крайней мере, две висячие вершины.
Дерево с 7 вершинами и 6 рёбрами:



27. Можно ли построить несвязный граф с 13 вершинами и 4 рёбрами?

Решение.

Да, например:



Ответ: да.

-
-
-

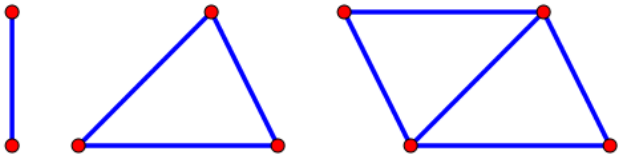
48. Построить граф по матрице смежности:

	A	B	C	D	E	F
A		1	1	0	0	0
B	1		1	0	0	1
C	1	1		0	0	0
D	0	0	0		1	1
E	0	0	0	1		1
F	0	1	0	1	1	

Есть ли цикл в данном графе?

3. Уникурсальные графы

Уникурсальный граф — это связный граф, который можно построить одним росчерком, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя по одному ребру дважды.
Три уникурсальных графа:

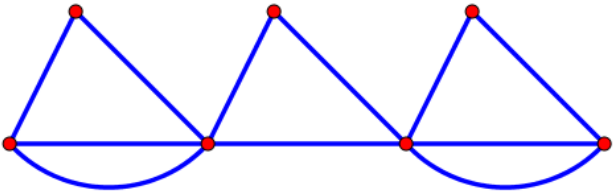


В уникурсальном графе может быть любое число чётных вершин, но не более двух нечётных.

Если только чётные вершины, то построение пути можно начинать с любой вершины и закончить его в той же вершине.

Если есть две нечётные вершины, то построение пути надо начинать с любой из нечётных вершин и закончить его в другой нечётной вершине.
Граф можно обойти, пройдя по каждому ребру только один раз в том случае, если граф связный и нечётных вершин у него 0 или 2.

49. Можно ли нарисовать фигуру, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя по одной линии дважды?



Решение.

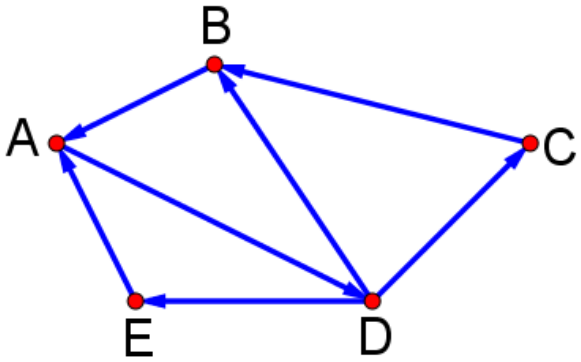
Степени вершин: 2, 2, 2, 3, 3, 5, 5. Четыре нечётные вершины. Нельзя нарисовать фигуру, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя по одной линии дважды
Ответ: нет.

-
-
-

72. Степени вершин уникурсального графа:
4, 4, 5, x, x, x, (x + 1).
Сумма степеней всех вершин не менее 18 и не более 26.
Найдите значение x.

4. Ориентированные графы

Ориентированный граф — это граф, в котором каждое ребро имеет направление, выбрано начало и конец ребра. Направленные рёбра называют также *дугами*.
Матрица смежности ориентированного графа:



	A	B	C	D	E
A		0	0	1	0
B	1		0	0	0
C	0	1		0	0
D	0	1	1		1
E	1	0	0	0	

Сумма (по строкам) исходящих степеней всех вершин:
1 + 1 + 1 + 3 + 1 = 7.
Сумма (по столбцам) входящих степеней всех вершин:
2 + 2 + 1 + 1 + 1 = 7.
В данном графе 7 дуг.
Сумма исходящих степеней всех вершин равна сумме входящих степеней всех вершин: обе суммы равны числу рёбер графа.

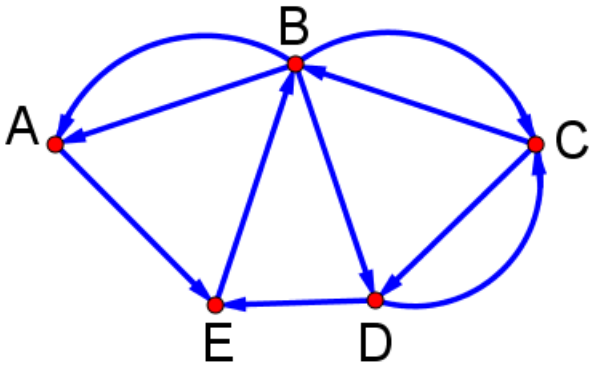
Путь в ориентированном графе —
это последовательность вершин, в которой из каждой вершины идёт ребро в следующую.
Простой путь в ориентированном графе — это путь, не проходящий дважды через одну вершину.

73. Построить ориентированный граф по матрице смежности:

	A	B	C	D	E
A		0	0	0	1
B	2		1	1	0
C	0	1		1	0
D	0	0	1		1
E	0	1	0	0	

Сколько дуг в данном графе?

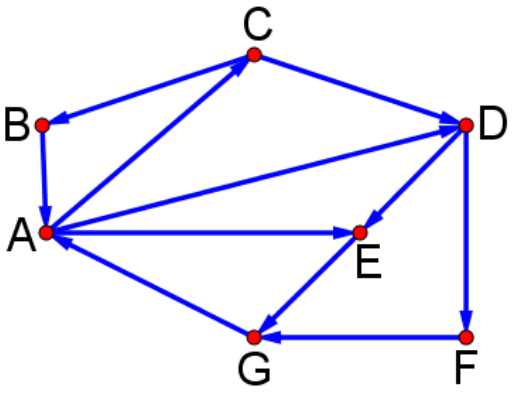
Решение.



Сумма (по строкам) исходящих степеней всех вершин:
1 + 4 + 2 + 2 + 1 = 10.
Сумма (по столбцам) входящих степеней всех вершин:
2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10.
В данном графе 10 дуг.
Ответ: 10.

-
-
-

92. Сколько в ориентированном графе различных путей из A в G?



5. Взвешенные графы

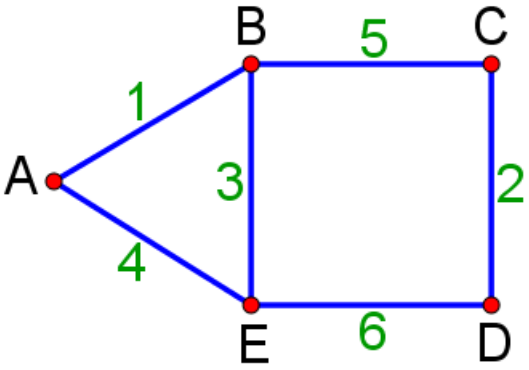
Взвешенный граф — это граф, в котором каждое ребро имеет числовое значение — вес.

Вес ребра может обозначать расстояние между населёнными пунктами, стоимость проезда, время в пути, стоимость строительства дорог и т. п.

Взвешенные графы бывают и неориентированными, и ориентированными.

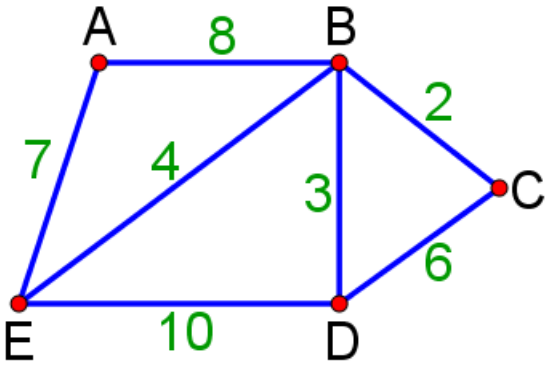
Вес графа — сумма весов всех рёбер, входящих в него.

Весовая матрица взвешенного графа:



	A	B	C	D	E
A		1			4
B	1		5		3
C		5		2	
D			2		6
E	4	3		6	

93. Постройте весовую матрицу данного графа:



Решение.

	A	B	C	D	E
A		8			7
B	8		2	3	4
C		2		6	
D		3	6		10
E	7	4		10	

-
-
-

108. В таблице указано среднее время движения в часах на автобусе по дорогам между населёнными пунктами A, B, C, D, E, F. Найдите маршрут с наименьшим временем движения по этим дорогам из A в F.

	A	B	C	D	E	F
A		3				13
B	3		5			
C		5		2	2	4
D			2		1	
E			2	1		1
F	13		4		1	

6. Разные задачи на графы

109. Трое друзей играли в шашки. Один из них сыграл 18 партий, а другой — 13 партий. Мог ли третий участник сыграть 21 партию?

Решение.

Да, например, первый с третьим сыграли 13 партий,
второй с третьим — 8 партий,
первый со вторым — 5 партий.
Всего третий сыграл: 13 + 8 = 21 партию.
Ответ: да.

-
-
-

130. Можно ли построить граф, в котором будут только вершины степени 5 и 6, а число рёбер будет равно 19?

Решения и ответы

5. 8.
Для того, чтобы найти число рёбер графа, надо сложить степени всех вершин и полученный результат разделить на два. Всего рёбер: (1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 5) : 2 = 8.

6. 11.
Для того, чтобы найти число рёбер графа, надо сложить степени всех вершин и полученный результат разделить на два. Всего рёбер: (1 + 3 + 3 + 5 + 5 + 5) : 2 = 11.

-
-
-

130. Да.
Пусть x вершин степени 5, y вершин степени 6.
(5x + 6y) : 2 = 19;
5x + 6y = 38.
Решим перебором натуральных значений, получаем x = 4, y = 3.
$5 \cdot 4 + 6 \cdot 3 = 38$.
Возьмём полный граф с 7 вершинами A, B, C, D, E, F, G. Удалим два ребра, не имеющих общей вершины,

например AB и CD. Тогда степени четырёх вершин A, B, C, D станут равны 5, а степени остальных трёх вершин останутся равны 6. Число рёбер: 21 – 2 = 19. Получили требуемый граф. Ответ: да.

Электронные издания

(СМИ МетаШкола)

Задачи на числа

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на числа. 4 класс.
2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на числа. 5 класс.
3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на числа. 6 класс.
4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на числа. 7 класс.
5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на числа. 8 класс.
6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на числа. 9 класс.

Задачи на части, дроби, проценты и пропорции

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на части и дроби. 4 класс.
2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на части и дроби. 5 класс.
3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на дроби,

проценты и пропорции. 6 класс.
4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на дроби, проценты и пропорции. 7 класс.
5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на дроби, проценты и пропорции. 8 класс.
6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на дроби, проценты и пропорции. 9 класс.

Задачи на движение

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на движение. 4 класс.
2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на движение. 5 класс.
3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на движение. 6 класс.
4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на движение. 7 класс.
5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на движение. 8 класс.
6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на движение. 9 класс.

Задачи на работу

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на работу.

4 класс.
2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на работу.
5 класс.
3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на работу.
6 класс.
4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на работу.
7 класс.
5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на работу.
8 класс.
6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на работу.
9 класс.

Задачи по геометрии

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по геометрии.
4 класс.
2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по геометрии.
5 класс.
3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по геометрии.
6 класс.
4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по геометрии.
7 класс.
5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по геометрии.
8 класс.
6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по геометрии.
9 класс.

Задачи по комбинаторике

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по комбинаторике. 4 класс.
2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по комбинаторике. 5 класс.
3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по комбинаторике. 6 класс.
4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по комбинаторике. 7 класс.
5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по комбинаторике. 8 класс.
6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по комбинаторике. 9 класс.

Задачи по теории вероятностей

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории вероятностей. 4 класс.
2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории вероятностей. 5 класс.
3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории вероятностей. 6 класс.
4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории вероятностей. 7 класс.
5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории

вероятностей. 8 класс.
6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории вероятностей. 9 класс.

Задачи по теории множеств

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на множества. 4 класс.
2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на множества. 5 класс.
3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на множества. 6 класс.
4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на множества. 7 класс.
5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на множества. 8 класс.
6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на множества. 9 класс.

Задачи по теории графов

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории графов. 4 класс.
2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории графов. 5 класс.
3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории графов.

6 класс.
4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории графов. 7 класс.
5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории графов. 8 класс.

Бумажные издания

(Издательство СМИО Пресс)

1 класс

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие игры. 1 класс

2 класс

2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие игры. 2 класс

3 класс

3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие игры. 3 класс

4 класс

4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие игры. 4 класс

5 класс

5. Смыкалова Е. В. Математика. Самостоятельные работы. 5 класс
6. Смыкалова Е. В. Математика. Сборник задач 5 класс
7. Смыкалова Е. В. Математика. Дополнительные главы 5 класс
8. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие игры 5 класс

5-6 классы

9. Смыкалова Е. В. Устный счёт в таблицах. 5-6 классы
10. Смыкалова Е. В. Математика. Опорные конспекты 5-6 классы
11. Смыкалова Е. В. Развивающее обучение на уроках математики в 5-6 классах. Программа, поурочное планирование, тесты
12. Смыкалова Е. В. Тренировка памяти и внимания на уроках математики 5-6 классы
13. Смыкалова Е. В. Устное умножение в таблицах. 5–6 классы

6 класс

14. Смыкалова Е. В. Математика. Сборник задач 6 класс
15. Смыкалова Е. В. Математика. Дополнительные главы 6 класс

16. Смыкалова Е. В. Математика. Самостоятельные работы. 6 класс
17. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие игры 6 класс

7 класс

18. Смыкалова Е. В. Математика. Сборник задач 7 класс
19. Смыкалова Е. В. Математика. Дополнительные главы 7 класс
20. Смыкалова Е. В. Алгебра. Самостоятельные работы. 7 класс.
21. Смыкалова Е. В. Самостоятельные работы по геометрии. 7 класс
22. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие игры. 7 класс

7-9 классы

23. Смыкалова Е. В. Алгебра. Опорные конспекты 7-9 классы
24. Смыкалова Е. В. Геометрия. Опорные конспекты 7-9 классы

8 класс

25. Смыкалова Е. В. Алгебра. Самостоятельные работы. 8 класс

26. Смыкалова Е. В. Геометрия. Самостоятельные работы. 8 класс
27. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие игры. 8 класс

8-9 классы

28. Смыкалова Е. В. Модули, параметры, многочлены. 8-9 классы

9 класс

29. Смыкалова Е. В. Самостоятельные работы по алгебре. 9 класс
30. Смыкалова Е. В. Самостоятельные работы по геометрии. 9 класс
31. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие игры. 9 класс

Все классы

32. Смыкалова Е. В. Математические каникулы. Увлекательные математические игры и головоломки
33. Смыкалова Е. В. Математические игры. На пляже, в пути, у камина

МетаШкола

	A	B	C	D
A		1	0	0
B	0		0	1
C	0	1		0
D	1	0	1	

ISBN 978-5-6051895-7-2

