

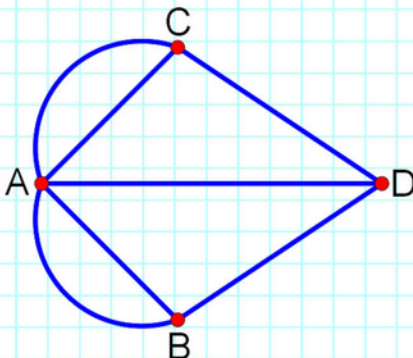
Е. В. Смыкалова

# МАТЕМАТИКА

## ЗАДАЧИ

### ПО ТЕОРИИ ГРАФОВ

	A	B	C	D
A		2	2	1
B	2		0	1
C	2	0		1
D	1	1	1	



Е. В. Смыкалова

Математика  
Задачи  
по теории графов

7 класс

ДемOVERсия

Санкт-Петербург  
СМИ МетаШкола  
2024

УДК 373.51  
ББК 20.я72

Смыкалова Елена Владимировна

С52

Математика. Задачи по теории графов.  
7 класс: Сборник задач / Е. В. Смыкалова. – СПб.: СМИ  
МетаШкола, 2024. – 100 с. – ISBN 978-5-6051895-6-5

Сборник содержит 120 задач по теории графов для 7 класса: задачи про вершины и рёбра графа, задачи на связанные и несвязные графы, задачи на уникарсальные графы и на ориентированные графы. Приводятся образцы оформления для первых четырёх задач каждой главы. Ко всем задачам есть ответы и подробные решения в конце книги. Книга будет интересна и полезна ученикам 7 класса, их родителям и учителям математики.

ISBN 978-5-6051895-6-5

© Смыкалова Е. В., 2024

© СМИ МетаШкола, 2024

Все права защищены.

Эта книга, целиком или частично, не может быть использована или размещена где-либо в любой форме и с использованием любых технических средств без письменного разрешения владельца авторских прав. Нарушение прав преследуется по закону.

[www.metaschool.ru](http://www.metaschool.ru)

---

## Оглавление

Предисловие.....	5
1. Вершины и рёбра графа.....	6
2. Связные и несвязные графы.....	15
3. Уникурсальные графы.....	24
4. Ориентированные графы.....	37
5. Разные задачи на графы.....	48
Решения и ответы.....	56

## Предисловие

Сборник содержит 120 задач по теории графов для 7 класса. В первой главе — задачи про вершины и рёбра графа; во второй главе — задачи на связные и несвязные графы; в третьей — задачи на уникальные графы; в четвёртой — задачи на ориентированные графы; в пятой — разные задачи на графы.

Рассматриваются различные способы решения задач. Приводятся образцы оформления для первых четырёх задач каждой главы. Ко всем задачам есть ответы и подробные решения в конце книги. Книга будет интересна и полезна ученикам 7 класса, их родителям и учителям математики.

Это четвёртая книга серии «Задачи по теории графов» 4 – 9 классы.

Материал книги был апробирован на уроках математики, на занятиях математического кружка в Физико-математическом лицее № 366 Санкт-Петербурга и в интернет-кружке МетаШколы [www.metaschool.ru](http://www.metaschool.ru).

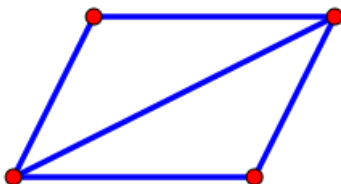
Желаем успехов в изучении математики!

## 1. Вершины и рёбра графа

*Граф* — это набор точек, некоторые из которых соединены линиями.

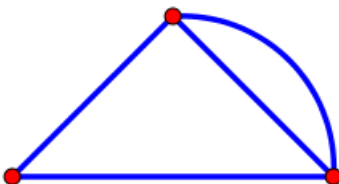
Эти точки называются *вершинами* графа, а соединяющие их линии — *рёбрами*.

Граф с 4 вершинами и 5 рёбрами:



Два ребра называются *кратными*, если они соединяют одну и ту же пару вершин.

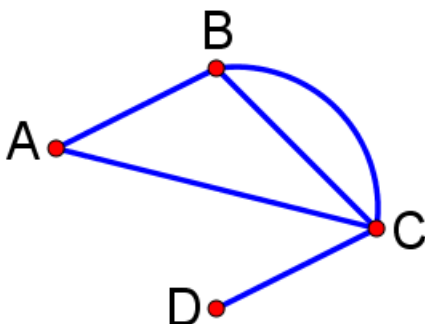
Граф с кратными рёбрами:



Число рёбер, выходящих из вершины графа, называется *степенью* этой вершины.

Степени вершин данного графа:

A — 2, B — 3, C — 4, D — 1.



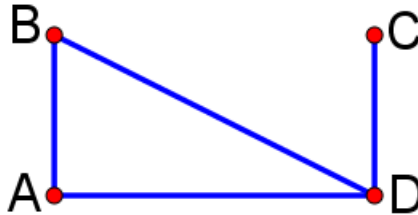
Вершина называется *чётной*, если её степень чётна, и *нечётной*, если её степень нечётна.

*Число нечётных вершин любого графа — чётно.*

В любом графе сумма степеней всех вершин является чётным числом, она равна удвоенному числу рёбер. Для того, чтобы найти число рёбер графа, надо сложить степени всех вершин и полученный результат разделить на два.

*Смежные вершины* — это вершины, соединённые ребром.

Матрица смежности графа:



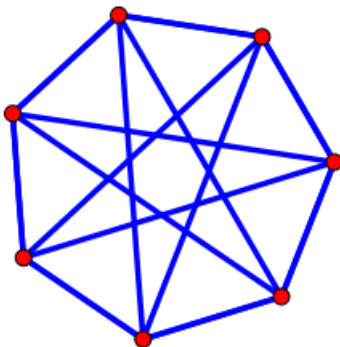
	A	B	C	D
A	1	1	0	1
B	1	1	0	1
C	0	0	1	1
D	1	1	1	1

Если вершины соединены ребром, то на пересечении строки и столбца стоит 1, если не соединены ребром — 0.

1. Можно ли построить граф с 7 вершинами так, чтобы из каждой вершины выходило 4 ребра?

Решение.

Да, например:



Из каждой вершины выходит 4 ребра, тогда всего рёбер:  
 $4 \cdot 7 : 2 = 14$ .

Построить граф можно.

Ответ: да.

- 
- 
- 

24. Можно ли нарисовать 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с пятью другими?

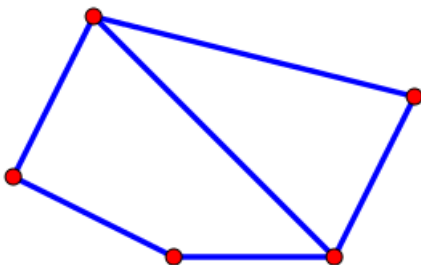
## 2. Связные и несвязные графы

Граф называется *связным*, если любые две его вершины можно соединить путём — непрерывной последовательностью рёбер.

В связном графе от любой его вершины можно по рёбрам добраться до любой другой вершины.

В связном графе только одна компонента связности.

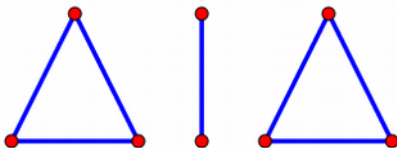
Связный граф с 5 вершинами и 6 рёбрами:



В *несвязном* графе более одной компоненты связности.

Каждая компонента связности является связным графом.

Например — несвязный граф с 8 вершинами и 7 рёбрами:

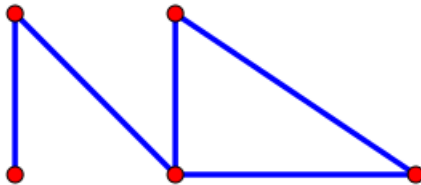


Если в связном графе  $n$  вершин, то число рёбер не менее, чем  $(n - 1)$ .

Цикл в графе — замкнутый путь, не проходящий дважды через одну и ту же вершину.

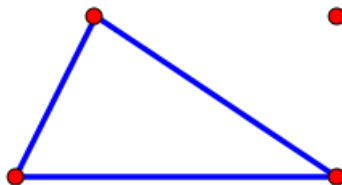
Начальная вершина в цикле совпадает с конечной вершиной.

Граф с циклом с 5 вершинами и 5 рёбрами:



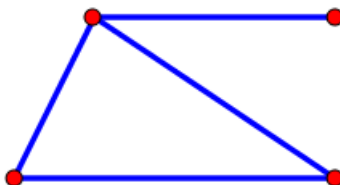
Вершина степени 0 называется *изолированной*, из неё не выходит ни одного ребра.

Граф с изолированной вершиной:



Вершина степени 1 называется *висячей*, из неё выходит ровно одно ребро.

Граф с висячей вершиной:

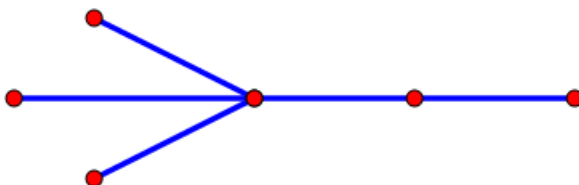


*Дерево* — связный граф без циклов.

У дерева число рёбер на единицу меньше числа вершин.

В любом дереве имеются, по крайней мере, две висячие вершины.

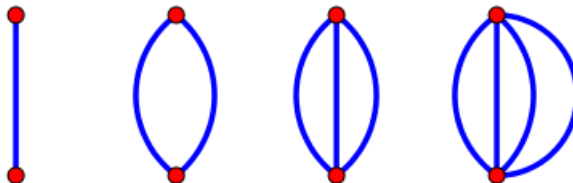
Дерево с 6 вершинами и 5 рёбрами:



25. Можно ли построить несвязный граф с 8 вершинами, степени которых равны 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4?

Решение.

Да, например:



Ответ: да.

- 
- 
- 

48. Построить граф по матрице смежности:

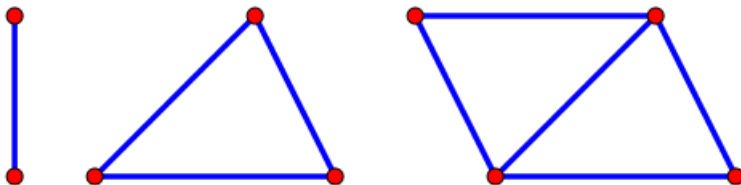
	A	B	C	D	E
A		1	1	0	0
B	1		0	1	1
C	1	0		0	0
D	0	1	0		0
E	0	1	0	0	

Есть ли цикл в данном графе?

### 3. Уникурсальные графы

*Уникурсальный граф* — это связный граф, который можно построить одним росчерком, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя по одному ребру дважды.

Три уникурсальных графа:



*В уникурсальном графе может быть любое число чётных вершин, но не более двух нечётных.*

Если только чётные вершины, то построение пути можно начинать с любой вершины и закончить его в той же вершине.

Если есть две нечётные вершины, то построение пути надо начинать с любой из нечётных вершин и закончить его в другой нечётной вершине.

Граф можно обойти, пройдя по каждому ребру только один



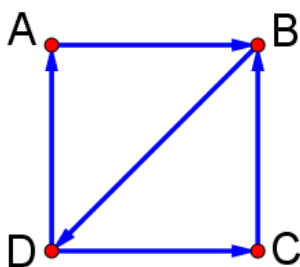
72. Степени вершин уникурсального графа:

2, 2, 2, 4, 4, 5,  $x$ . Сумма степеней всех вершин не менее 21 и не более 23. Найдите значение  $x$ .

## 4. Ориентированные графы

*Ориентированный граф* — это граф, в котором каждое ребро имеет направление, выбрано начало и конец ребра. Направленные рёбра называют также *дугами*.

*Матрица смежности* ориентированного графа:



	A	B	C	D
A		1	0	0
B	0		0	1
C	0	1		0
D	1	0	1	

Сумма (по строкам) исходящих степеней всех вершин:  
 $1 + 1 + 1 + 2 = 6$ .

Сумма (по столбцам) входящих степеней всех вершин:  
 $1 + 2 + 1 + 1 = 6$ .

В данном графе 6 дуг.

*Сумма исходящих степеней всех вершин равна сумме входящих степеней всех вершин: обе суммы равны числу рёбер графа.*

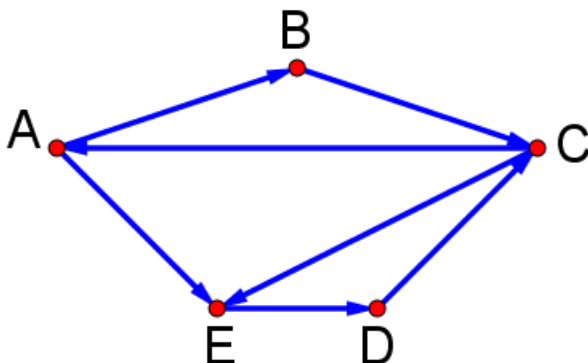
*Путь* в ориентированном графе — это последовательность вершин, в которой из каждой вершины идёт ребро в следующую.

73. Построить ориентированный граф по матрице смежности:

	A	B	C	D	E
A		1	0	0	1
B	0		1	0	0
C	1	0		0	1
D	0	0	1		0
E	0	0	0	1	

Сколько дуг в данном графе?

Решение.



Сумма (по строкам) исходящих степеней всех вершин:  
 $2 + 1 + 2 + 1 + 1 = 7$ .

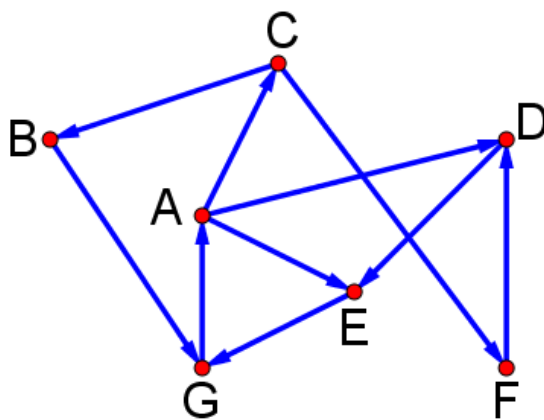
Сумма (по столбцам) входящих степеней всех вершин:  
 $1 + 1 + 2 + 1 + 2 = 7$ .

В данном графе 7 дуг.

Ответ: 7.

- 
- 
- 

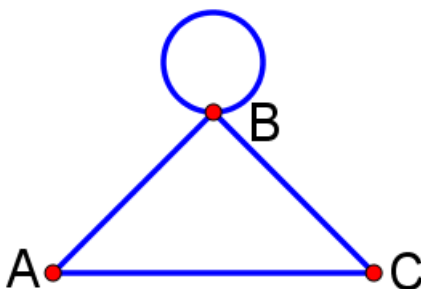
92. Сколько в ориентированном графе различных путей из A в G?



## 5. Разные задачи на графы

*Петля* — ребро, которое начинается и заканчивается в одной вершине.

Граф с петлёй:



Степени вершин: A — 2, B — 4, C — 2.

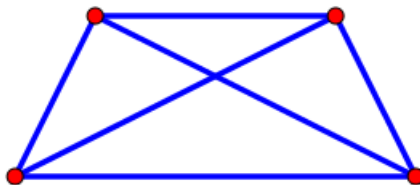
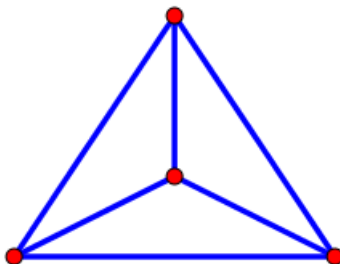
*Пустой граф* — не имеет рёбер, только вершины.

*Простой граф* — без кратных рёбер и петель.

*Полный граф* — это простой граф, в котором любые две вершины соединены ребром.

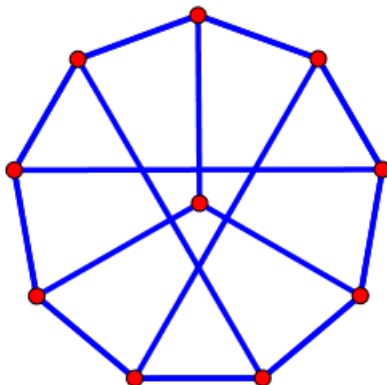
Число рёбер в полном графе с  $n$  вершинами равно:  
 $(n - 1) \cdot n : 2$ .

Полный граф с 4 вершинами и 6 рёбрами:



93. В государстве 10 городов. Можно ли построить такую схему дорог, чтобы из каждого города выходило по три дороги, и при этом по ним можно было пройти из каждого города в каждый напрямую или минуя один город?

Решение.



Да, например: 9 вершин разместить по кругу, а одну вершину в центре, соединить рёбрами, чтобы граф был связным, чтобы степень каждой вершины была равна 3, и чтобы можно было пройти по рёбрам из каждой вершины в каждую другую напрямую или через одну вершину.

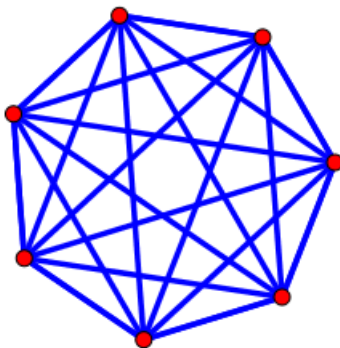
Ответ: да.

- 
- 
- 

120. В острове 12 городов, каждый город с каждым соединён дорогой. Какое наибольшее число дорог можно закрыть на ремонт так, чтобы из каждого города можно было проехать в каждый?

## Решения и ответы

5. Да.



Из каждой вершины выходит 6 рёбер, тогда всего рёбер:  
 $6 \cdot 7 : 2 = 21$ .

Построить граф можно.

6. Нет.

Из каждой вершины выходит 5 рёбер, тогда всего рёбер:  
 $5 \cdot 7 : 2$ .

$5 \cdot 7 = 35$  — на 2 не делится.

Построить граф невозможно.

- 
- 
- 

120. 55.

Число рёбер в полном графе с 12 вершинами:

$$11 \cdot 12 : 2 = 66.$$

Число дорог в дереве с 12 вершинами:  $12 - 1 = 11$ .

Число дорог, которые можно закрыть на ремонт:

$$66 - 11 = 55.$$

---

## **Электронные издания**

([СМИ МетаШкола](#))

### **Задачи на числа**

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на числа. 4 класс.
2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на числа. 5 класс.
3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на числа. 6 класс.
4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на числа. 7 класс.
5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на числа. 8 класс.
6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на числа. 9 класс.

### **Задачи на части, дроби, проценты и пропорции**

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на части и дроби. 4 класс.
2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на части и дроби. 5 класс.
3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на дроби,

---

проценты и пропорции. 6 класс.

4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на дроби, проценты и пропорции. 7 класс.

5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на дроби, проценты и пропорции. 8 класс.

6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на дроби, проценты и пропорции. 9 класс.

### **Задачи на движение**

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на движение. 4 класс.

2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на движение. 5 класс.

3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на движение. 6 класс.

4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на движение. 7 класс.

5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на движение. 8 класс.

6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на движение. 9 класс.

### **Задачи на работу**

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на работу.

---

4 класс.

2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на работу.

5 класс.

3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на работу.

6 класс.

4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на работу.

7 класс.

5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на работу.

8 класс.

6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на работу.

9 класс.

## **Задачи по геометрии**

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по геометрии.

4 класс.

2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по геометрии.

5 класс.

3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по геометрии.

6 класс.

4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по геометрии.

7 класс.

5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по геометрии.

8 класс.

6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по геометрии.

9 класс.

---

## **Задачи по комбинаторике**

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по комбинаторике. 4 класс.
2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по комбинаторике. 5 класс.
3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по комбинаторике. 6 класс.
4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по комбинаторике. 7 класс.
5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по комбинаторике. 8 класс.
6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по комбинаторике. 9 класс.

## **Задачи по теории вероятностей**

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории вероятностей. 4 класс.
2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории вероятностей. 5 класс.
3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории вероятностей. 6 класс.
4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории вероятностей. 7 класс.
5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории

---

вероятностей. 8 класс.

6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории вероятностей. 9 класс.

### **Задачи по теории множеств**

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на множества. 4 класс.

2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на множества. 5 класс.

3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на множества. 6 класс.

4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на множества. 7 класс.

5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на множества. 8 класс.

6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на множества. 9 класс.

### **Задачи по теории графов**

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории графов. 4 класс.

2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории графов. 5 класс.

3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории графов.

---

6 класс.

4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории графов.

7 класс.

## **Бумажные издания**

([Издательство СМАО Пресс](#))

### **1 класс**

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие игры. 1 класс

### **2 класс**

2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие игры. 2 класс

### **3 класс**

3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие игры. 3 класс

### **4 класс**

4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие игры. 4 класс

---

## **5 класс**

5. Смыкалова Е. В. Математика. Самостоятельные работы. 5 класс
6. Смыкалова Е. В. Математика. Сборник задач 5 класс
7. Смыкалова Е. В. Математика. Дополнительные главы 5 класс
8. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие игры 5 класс

## **5-6 классы**

9. Смыкалова Е. В. Устный счёт в таблицах. 5-6 классы
10. Смыкалова Е. В. Математика. Опорные конспекты 5-6 классы
11. Смыкалова Е. В. Развивающее обучение на уроках математики в 5-6 классах. Программа, поурочное планирование, тесты
12. Смыкалова Е. В. Тренировка памяти и внимания на уроках математики 5-6 классы
13. Смыкалова Е. В. Устное умножение в таблицах. 5-6 классы

## **6 класс**

14. Смыкалова Е. В. Математика. Сборник задач 6 класс
15. Смыкалова Е. В. Математика. Дополнительные главы 6 класс

---

16. Смыкалова Е. В. Математика. Самостоятельные работы. 6 класс

17. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие игры 6 класс

## **7 класс**

18. Смыкалова Е. В. Математика. Сборник задач 7 класс

19. Смыкалова Е. В. Математика. Дополнительные главы 7 класс

20. Смыкалова Е. В. Алгебра. Самостоятельные работы. 7 класс.

21. Смыкалова Е. В. Самостоятельные работы по геометрии. 7 класс

22. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие игры. 7 класс

## **7-9 классы**

23. Смыкалова Е. В. Алгебра. Опорные конспекты 7-9 классы

24. Смыкалова Е. В. Геометрия. Опорные конспекты 7-9 классы

## **8 класс**

25. Смыкалова Е. В. Алгебра. Самостоятельные работы. 8 класс

- 
26. Смыкалова Е. В. Геометрия. Самостоятельные работы. 8 класс
27. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие игры. 8 класс

### **8-9 классы**

28. Смыкалова Е. В. Модули, параметры, многочлены. 8-9 классы

### **9 класс**

29. Смыкалова Е. В. Самостоятельные работы по алгебре. 9 класс
30. Смыкалова Е. В. Самостоятельные работы по геометрии. 9 класс
31. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие игры. 9 класс

### **Все классы**

32. Смыкалова Е. В. Математические каникулы. Увлекательные математические игры и головоломки
33. Смыкалова Е. В. Математические игры. На пляже, в пути, у камина



	A	B	C	D
A		2	2	1
B	2		0	1
C	2	0		1
D	1	1	1	

ISBN 978-5-6051895-6-5



9 785605 189565 >