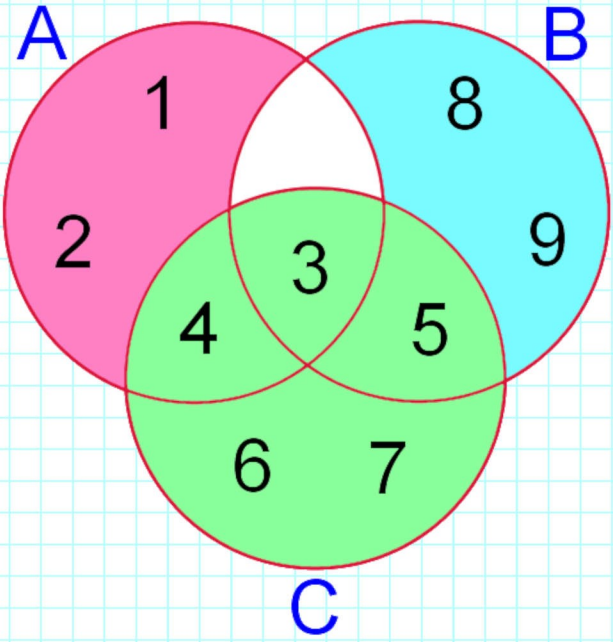
Е. В. Смыкалова

МАТЕМАТИКА

ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ



9

Е. В. Смыкалова

Математика
Задачи
по теории множеств

9 класс

Демоверсия

Санкт-Петербург
СМИ МетаШкола
2024

УДК 373.51
ББК 20.я72

Смыкалова Елена Владимировна

С52 Математика. Задачи по теории множеств.
9 класс: Сборник задач / Е. В. Смыкалова. – СПб.: СМИ МетаШкола, 2024. – 86 с. – ISBN 978-5-6051895-2-7

Сборник содержит 110 задач по теории множеств для 9 класса: задачи на элементы множества, на равные множества, на мощность множества, на подмножества, на пересечение, объединение и разность множеств. Приводятся образцы оформления для первых четырёх задач каждой главы. Ко всем задачам есть ответы и подробные решения в конце книги. Книга будет интересна и полезна ученикам 9 класса, их родителям и учителям математики.

ISBN 978-5-6051895-2-7

© Смыкалова Е. В., 2024
© СМИ МетаШкола, 2024

Все права защищены.
Эта книга, целиком или частично, не может быть использована или размещена где-либо в любой форме и с использованием любых технических средств без письменного разрешения владельца авторских прав. Нарушение прав преследуется по закону.

www.metaschool.ru

Оглавление

Предисловие.....5

1. Элементы множества.....6

2. Равные множества.....11

3. Мощность множества.....16

4. Подмножества.....20

5. Пересечение множеств.....25

6. Объединение множеств.....31

7. Разность множеств.....37

8. Задачи повышенной сложности.....42

Решения и ответы.....53

Предисловие

Сборник содержит 110 задач по теории множеств для 9 класса. В первой главе — задачи на элементы множеств; во второй главе — на равные множества; в третьей — на мощность множества; в четвёртой — на подмножества; в пятой — на пересечение множеств; в шестой — на объединение множеств; в седьмой — на разность множеств; в восьмой — задачи повышенной сложности.

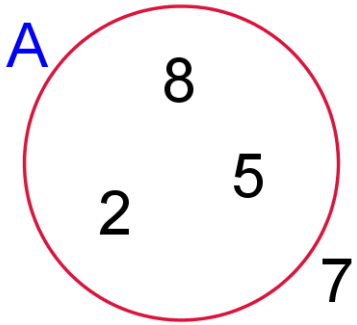
Рассматриваются различные способы решения задач. Приводятся образцы оформления для первых четырёх задач каждой главы. Ко всем задачам есть ответы и подробные решения в конце книги. Книга будет интересна и полезна ученикам 9 класса, их родителям и учителям математики.

Это шестая книга серии «Задачи по теории множеств» для 4–9 классов.
Материал книги был апробирован на уроках математики, на занятиях математического кружка в Физико-математическом лицее № 366 Санкт-Петербурга и в интернет-кружке МетаШколы www.metaschool.ru.

Желаем успехов в изучении математики!

1. Элементы множества

Множество — одно из основных понятий математики.
Его смысл выражается словами: совокупность, собрание, класс, набор, команда.
Множества обычно обозначаются прописными буквами латинского алфавита A, B, C, …
О предметах, составляющих множество, говорят, что они принадлежат этому множеству, или являются его элементами.
Множества, элементами которых являются числа, называются числовыми множествами.
Если множество содержит конечное число элементов, то его называют конечным. Конечное множество может быть задано перечислением всех его элементов в произвольном порядке.



Запись A = {2; 5; 8} означает, что числа 2, 5 и 8 являются элементами множества A.
Число 5 — элемент множества A, пишут $5 \in A$.
Число 7 не является элементом A, пишут $7 \notin A$.
Различные способы задания множества:
1) даётся полный список элементов, входящих в множество;
2) указывается характеристическое свойство — элементы множества им обладают, а все остальные не обладают.

1. Задайте множество таких натуральных чисел, для которых все три утверждения неверные:
1) число больше, чем 15;
2) число не больше, чем 3;
3) число кратно трём.

Решение.

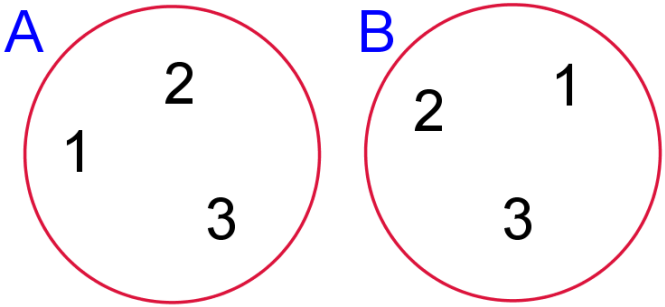
Верные утверждения:
1) число не больше 15;
2) число больше, чем 3;
3) число не кратно трём.
Множество таких натуральных чисел:
{4; 5; 7; 8; 10; 11; 13; 14}.
Ответ: {4; 5; 7; 8; 10; 11; 13; 14}.

-
-
-

12. Задайте перечислением элементов множество всех пятизначных чисел, сумма цифр которых равна 11, а произведение цифр равно 7.

2. Равные множества

Равные множества состоят из одних и тех же элементов.
Например, равные множества:
A = {1; 2; 3}, B = {2; 1; 3}; A = B.



13. Даны множества:
A — множество действительных корней уравнения
$x^2 + 1 = 0$;
B — множество действительных корней уравнения $x^2 = 1$;
C — множество действительных корней уравнения
$x + 1 = x + 2$;
D — множество действительных корней уравнения
$x + 1 = 1 – x$.
Есть ли среди данных множеств равные?

Решение.

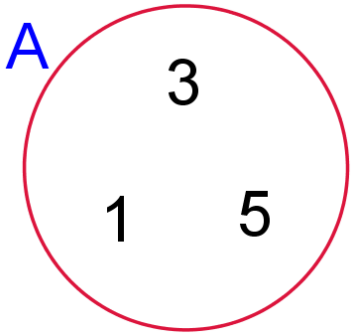
A = $\varnothing$;
B = {1; – 1};
C = $\varnothing$;
D = {0}.
Равные множества A и C.
Ответ: A = C.

-
-
-

24. Даны множества: A — множество букв слова «выбор», B — множество букв слова «адрес», C — множество букв слова «обрыв», D — множество букв слова «среда». Есть ли среди данных множеств равные?

3. Мощность множества

Если множество содержит конечное число элементов, то его называют конечным, а если в нём бесконечно много элементов, то бесконечным.
Например, множество иголок на ёлке конечно, а множество точек на прямой бесконечно.
Мощность множества — число элементов в конечном множестве.
Пусть множество A = {1; 3; 5}. В множестве A содержится три элемента.
Это обозначают так: |A| = 3.



Множество, в котором нуль элементов называют пустым.
Пустое множество обозначают $\varnothing$; $|\varnothing| = 0$.

25. Сколько элементов содержит множество натуральных решений уравнения: $x + y + z = xyz$.

Решение.

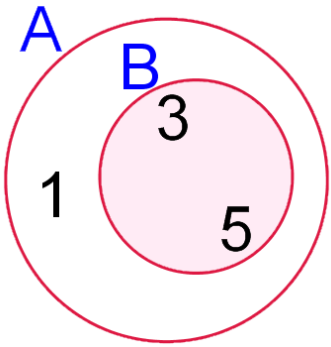
$1 + 2 + 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3$;
при $x \le y \le z$ получается $x = 1$, затем $(y - 1)(z - 1) = 2$,
откуда $(y, z) = (2, 3)$; 6 перестановок:
(1; 2; 3), (1; 3; 2), (2; 1; 3), (2; 3; 1), (3; 1; 2), (3; 2; 1).
Ответ: 6.

-
-
-

36. Сколько элементов содержит множество различных шестизначных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево (например, 123321)?

4. Подмножества

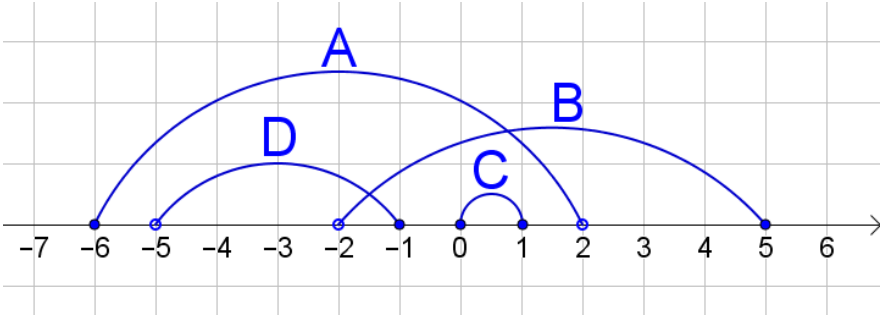
Пусть множество A = {1; 3; 5}.
Из элементов множества A можно составить новое множество, например, B = {3; 5}.
Каждый элемент множества B принадлежит множеству A.
B — подмножество A, пишут $B \subset A$.
Например, в множестве всех зверей множество зайцев является подмножеством.
Пустое множество $\varnothing$ не содержит ни одного элемента и является подмножеством любого множества.



Если множество содержит n элементов, то оно имеет 2^n подмножеств.
Пусть B = {3; 5}.
Подмножества множества B: $\varnothing$; {3}; {5}; {3; 5}.

37. Пусть A — множество чисел промежутка [– 6; 2),
B — множество чисел промежутка (– 2; 5],
C — множество чисел промежутка [0; 1],
D — множество чисел промежутка (– 5; – 1].
Какие из множеств B, C или D являются подмножествами множества A?

Решение.



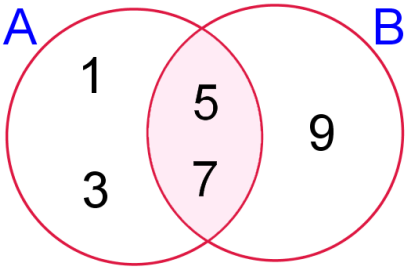
C и D — подмножества множества A.
Ответ: C и D.

-
-
-

48. Можно ли составить не менее десяти слов, буквы которых образуют подмножества множества A, где A — множество различных букв слова «полупериметр»?

5. Пересечение множеств

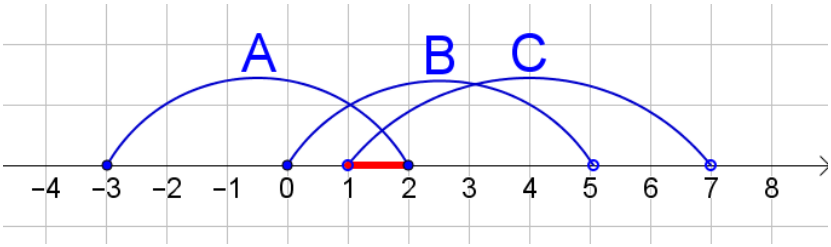
Пусть множество A = {1; 3; 5; 7}, множество B = {5; 7; 9}.
Эти множества имеют общие элементы 5 и 7.



Множества A и B называются пересекающимися множествами.
Множество общих элементов A и B называют пересечением множеств A и B: $A \cap B = \{5; 7\}$.
Число элементов в пересечении двух множеств A и B: $|A \cap B| = 2$.
Пусть множество A = {1; 3; 5; 7}, множество C = {4; 6}.
Множества A и C не имеют ни одного общего элемента, эти множества не пересекаются.
Пересечением множеств A и C является пустое множество: $A \cap C = \varnothing$.
Число элементов в пересечении двух множеств A и C: $|A \cap C| = |\varnothing| = 0$.

49. Пусть A — множество чисел промежутка [– 3; 2], B — множество чисел промежутка [0; 5), C — множество чисел промежутка (1; 7). Найдите A ∩ B ∩ C.

Решение.



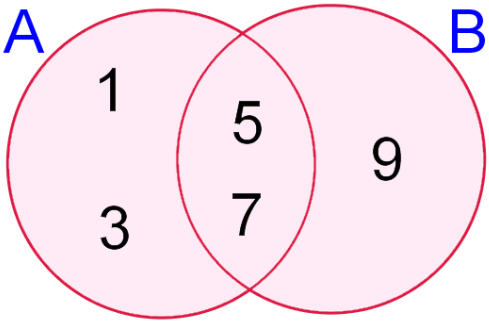
A ∩ B ∩ C = {x| x ∈ (1; 2]}.
Ответ: (1; 2].

-
-
-

60. На координатной плоскости заданы множества:
A = {(x, y)| x ≥ – 3}; B = {(x, y)| y ≤ 2};
C = {(x, y)| x – 2y – 1 ≤ 0}. Постройте A ∩ B ∩ C.
Найдите площадь фигуры в пересечении этих трёх множеств, если длина единичного отрезка равна 1 см.

6. Объединение множеств

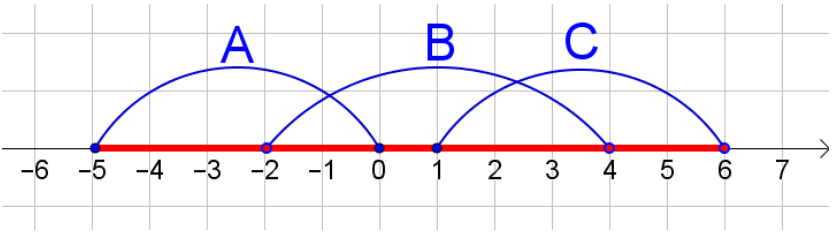
Пусть множество A = {1; 3; 5; 7}, множество B = {5; 7; 9}.



Если из элементов множеств A и B составить новое множество, состоящее из всех элементов этих множеств и не содержащее других элементов, то получится объединение множеств A и B: A ∪ B = {1; 3; 5; 7; 9}.
Число элементов в объединении множеств A и B:
|A ∪ B| = 5.
Объединение A ∪ B состоит из элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B.
|A ∪ B| = |A| + |B| – |A ∩ B|.
Пусть множество A = {1; 3; 5; 7}, множество C = ∅.
Объединением множеств A и C является множество A:
A ∪ C = A.
61. Пусть A — множество чисел промежутка [– 5; 0],

B — множество чисел промежутка (– 2; 4),
C — множество чисел промежутка [1; 6).
Найдите A ∪ B ∪ C.

Решение.



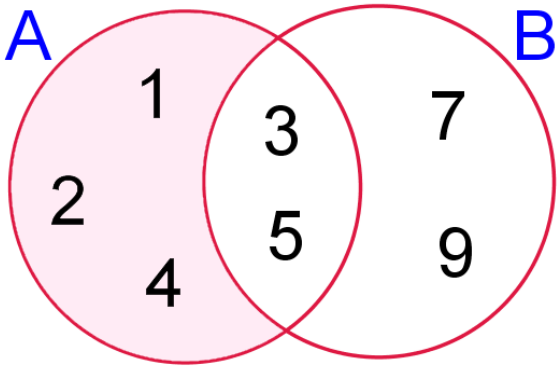
A ∪ B ∪ C — множество чисел промежутка [– 5; 6).
Ответ: [– 5; 6).

-
-
-

72. Пусть A — множество различных букв слова «парабола»,
B — множество различных букв слова «гипербола»,
C — множество различных букв слова «асимптота».
Сколько элементов в объединении этих трёх множеств?

7. Разность множеств

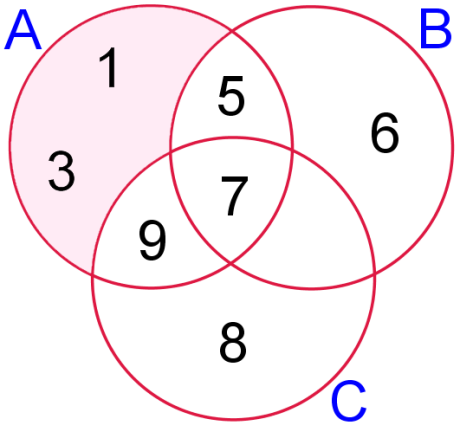
Даны множества: A = {1; 2; 3; 4; 5}; B = {3; 5; 7; 9}.



Разностью между множеством A и множеством B называют множество всех элементов из A, не являющихся элементами из B: A \ B = {1; 2; 4}.
Разностью между множеством B и множеством A называют множество всех элементов из B, не являющихся элементами из A: B \ A = {7; 9}.
Разность между множеством и его подмножеством называют также дополнением.
Пусть множество C = {1; 3; 5}, множество D = {3; 5}.
Дополнение D до C: {1}.

73. Даны множества: A = {1; 3; 5; 7; 9}; B = {5; 6; 7}; C = {7; 8; 9}. Найдите (A \ B) \ C.

Решение.



A = {1; 3; 5; 7; 9};
B = {5; 6; 7};
C = {7; 8; 9};
A \ B = {1; 3; 9};
(A \ B) \ C = {1; 3}.
Ответ: {1; 3}.

-
-
-

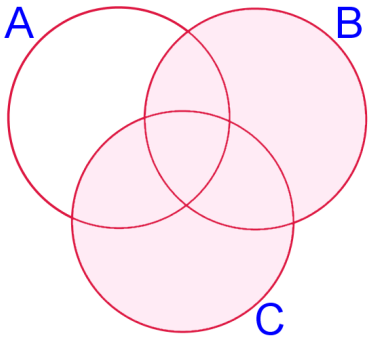
84. Пусть A — множество различных букв слова «неравенство»,
B — множество различных букв слова «прогрессия»,
C — множество различных букв слова «степень».
Найдите $|(A \setminus C) \cap (B \setminus C)|$.

8. Задачи повышенной сложности

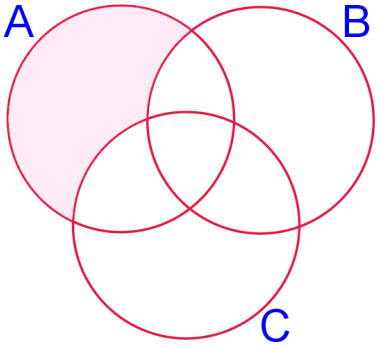
85. Докажите с помощью кругов Эйлера, что для любых трёх множеств A, B, C выполняется равенство:
A \ (B ∪ C) = (A \ B) ∩ (A \ C).

Решение.

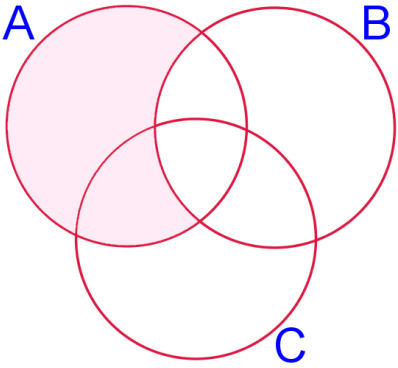
B ∪ C



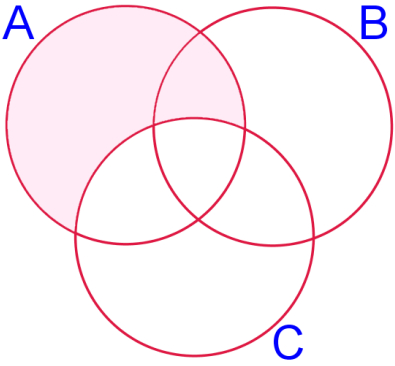
A \ (B ∪ C)



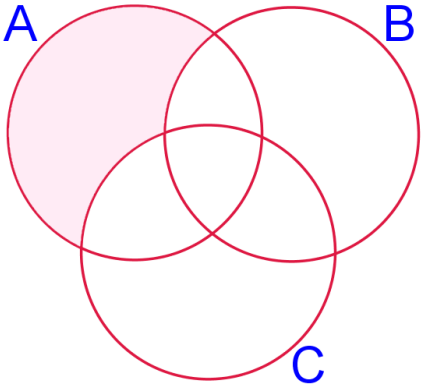
A \ B



A \ C



(A \ B) ∩ (A \ C)



Ответ: A \ (B ∪ C) = (A \ B) ∩ (A \ C).

-
-
-

110. На координатной плоскости заданы множества:
$A = \{(x, y)| |x| – y \geq 0\}$; $B = \{(x, y)| x^2 + y^2 \leq 9\}$.
Постройте $A \cap B$.
Найдите площадь фигуры в пересечении этих двух множеств, если длина единичного отрезка равна 1 см.

Решения и ответы

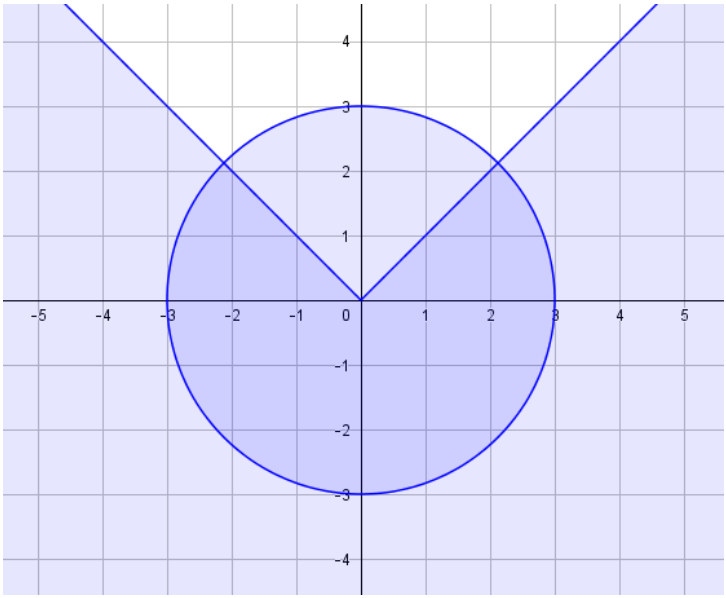
5. {4; 8; 12; 16; 20; 24}.
Все три утверждения верные: {4; 8; 12; 16; 20; 24}.

6. {3; 5; 7; 9; 11}.
Верные утверждения:
1) число не меньше 3;
2) число меньше, чем 13;
3) число нечётное.
Множество таких натуральных чисел: {3; 5; 7; 9; 11}.

7. {360; 720; 1080; 1440; 1800}.
Наименьшее общее кратное чисел 8, 9 и 10 равно 360.
Числа, делящиеся и на 8, и на 9, и на 10, делятся на 360.
Натуральные числа, меньшие 2000, делящиеся на 360:
360; 720; 1080; 1440; 1800.

-
-
-

110. $27/4 \cdot \pi$ см².



Построить график $y = |x|$, закрасить нижнюю область $y \le |x|$; $|x| - y \ge 0$.
Построить окружность с центром в начале координат, радиусом 3 см, закрасить внутреннюю область.
В пересечении этих двух множеств — 3/4 круга.
Площадь 3/4 круга: $(\pi \cdot 3^2) : 4 \cdot 3 = 27/4 \cdot \pi$ (см²).

Электронные издания

(СМИ МетаШкола)

Задачи на числа

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на числа. 4 класс.
2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на числа. 5 класс.
3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на числа. 6 класс.
4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на числа. 7 класс.
5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на числа. 8 класс.
6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на числа. 9 класс.

Задачи на части, дроби, проценты и пропорции

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на части и дроби. 4 класс.
2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на части и дроби. 5 класс.
3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на дроби,

проценты и пропорции. 6 класс.
4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на дроби, проценты и пропорции. 7 класс.
5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на дроби, проценты и пропорции. 8 класс.
6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на дроби, проценты и пропорции. 9 класс.

Задачи на движение

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на движение. 4 класс.
2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на движение. 5 класс.
3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на движение. 6 класс.
4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на движение. 7 класс.
5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на движение. 8 класс.
6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на движение. 9 класс.

Задачи на работу

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на работу.

4 класс.
2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на работу.
5 класс.
3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на работу.
6 класс.
4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на работу.
7 класс.
5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на работу.
8 класс.
6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на работу.
9 класс.

Задачи по геометрии

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по геометрии.
4 класс.
2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по геометрии.
5 класс.
3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по геометрии.
6 класс.
4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по геометрии.
7 класс.
5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по геометрии.
8 класс.
6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по геометрии.
9 класс.

Задачи по комбинаторике

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по комбинаторике. 4 класс.
2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по комбинаторике. 5 класс.
3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по комбинаторике. 6 класс.
4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по комбинаторике. 7 класс.
5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по комбинаторике. 8 класс.
6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по комбинаторике. 9 класс.

Задачи по теории вероятностей

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории вероятностей. 4 класс.
2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории вероятностей. 5 класс.
3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории вероятностей. 6 класс.
4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории вероятностей. 7 класс.
5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории

вероятностей. 8 класс.
6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи по теории вероятностей. 9 класс.

Задачи по теории множеств

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на множества. 4 класс.
2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на множества. 5 класс.
3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на множества. 6 класс.
4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на множества. 7 класс.
5. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на множества. 8 класс.
6. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи на множества. 9 класс.

Бумажные издания

(Издательство СМИО Пресс)

1 класс

1. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие игры. 1 класс

2 класс

2. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие игры. 2 класс

3 класс

3. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие игры. 3 класс

4 класс

4. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие игры. 4 класс

5 класс

5. Смыкалова Е. В. Математика. Самостоятельные работы. 5 класс
6. Смыкалова Е. В. Математика. Сборник задач 5 класс
7. Смыкалова Е. В. Математика. Дополнительные главы 5 класс

8. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие игры 5 класс

5-6 классы

9. Смыкалова Е. В. Устный счёт в таблицах. 5-6 классы
10. Смыкалова Е. В. Математика. Опорные конспекты 5-6 классы
11. Смыкалова Е. В. Развивающее обучение на уроках математики в 5-6 классах. Программа, поурочное планирование, тесты
12. Смыкалова Е. В. Тренировка памяти и внимания на уроках математики 5-6 классы
13. Смыкалова Е. В. Устное умножение в таблицах. 5–6 классы

6 класс

14. Смыкалова Е. В. Математика. Сборник задач 6 класс
15. Смыкалова Е. В. Математика. Дополнительные главы 6 класс
16. Смыкалова Е. В. Математика. Самостоятельные работы. 6 класс
17. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие игры 6 класс

7 класс

18. Смыкалова Е. В. Математика. Сборник задач 7 класс
19. Смыкалова Е. В. Математика. Дополнительные главы 7 класс
20. Смыкалова Е. В. Алгебра. Самостоятельные работы. 7 класс.
21. Смыкалова Е. В. Самостоятельные работы по геометрии. 7 класс
22. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие игры. 7 класс

7-9 классы

23. Смыкалова Е. В. Алгебра. Опорные конспекты 7-9 классы
24. Смыкалова Е. В. Геометрия. Опорные конспекты 7-9 классы

8 класс

25. Смыкалова Е. В. Алгебра. Самостоятельные работы. 8 класс
26. Смыкалова Е. В. Геометрия. Самостоятельные работы. 8 класс
27. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие игры. 8 класс

8-9 классы

28. Смыкалова Е. В. Модули, параметры, многочлены. 8-9 классы

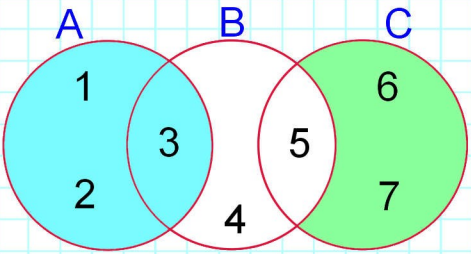
9 класс

29. Смыкалова Е. В. Самостоятельные работы по алгебре. 9 класс
30. Смыкалова Е. В. Самостоятельные работы по геометрии. 9 класс
31. Смыкалова Е. В. Математика. Задачи. Развивающие игры. 9 класс

Все классы

32. Смыкалова Е. В. Математические каникулы. Увлекательные математические игры и головоломки
33. Смыкалова Е. В. Математические игры. На пляже, в пути, у камина

МетаШкола



ISBN 978-5-6051895-2-7