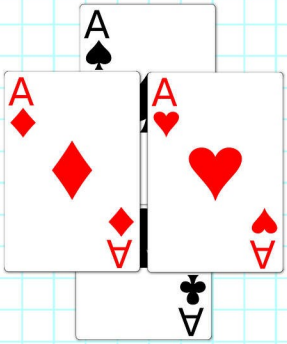
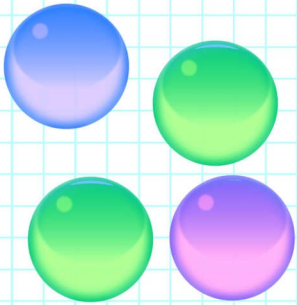
Е. В. Смыкалова

МАТЕМАТИКА

ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ









9

Е. В. Смыкалова

Математика
Задачи
по теории вероятностей

9 класс

Демоверсия

Санкт-Петербург
СМИ МетаШкола
2024

УДК 373.51
ББК 20.я72

Смыкалова Елена Владимировна

С52 Математика. Задачи по теории вероятностей.
9 класс: Сборник задач / Е. В. Смыкалова. – СПб.: СМИ МетаШкола, 2024. – 108 с. – ISBN 978-5-6051167-5-2

Сборник содержит 160 задач по теории вероятностей для 9 класса: задачи на случайные события; задачи на статистическое, классическое и геометрическое определение вероятности. Рассматриваются различные способы решения задач. Приводятся образцы оформления для первых четырёх задач каждой главы. Ко всем задачам есть ответы и подробные решения в конце книги. Книга будет интересна и полезна ученикам 9 класса, их родителям и учителям математики.

ISBN 978-5-6051167-5-2

© Смыкалова Е. В., 2024
© СМИ МетаШкола, 2024

Все права защищены.
Эта книга, целиком или частично, не может быть использована или размещена где-либо в любой форме и с использованием любых технических средств без письменного разрешения владельца авторских прав. Нарушение прав преследуется по закону.

www.metaschool.ru

Оглавление

Предисловие.....5

1. Случайные события.....6

2. Статистическое определение вероятности.....17

3. Классическое определение вероятности.....25

4. Геометрическое определения вероятности.....36

5. Задачи повышенной сложности.....44

Решения и ответы.....56

Предисловие

Сборник содержит 160 задач по теории вероятностей для 9 класса. В первой главе — задачи на случайные события; во второй главе — задачи на статистическое определение вероятности; в третьей — задачи на классическое определение вероятности; в четвёртой — задачи на геометрическое определение вероятности; в пятой — задачи повышенной сложности.

Рассматриваются различные способы решения задач. Приводятся образцы оформления для первых четырёх задач каждой главы. Ко всем задачам есть ответы и подробные решения в конце книги. Книга будет интересна и полезна ученикам 9 класса, их родителям и учителям математики.

Это шестая книга серии «Задачи по теории вероятностей» для 4–9 классов.
Материал книги был апробирован на уроках математики, на занятиях математического кружка
в Физико-математическом лицее № 366 Санкт-Петербурга и в интернет-кружке МетаШколы www.metaschool.ru.

Желаем успехов в изучении математики!

1. Случайные события

Кубик игральный в теории вероятностей имеет шесть граней правильной формы. На каждой грани выбито точками число, и при бросании кубика выпадает одно из шести чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Сумма чисел на противоположных гранях равна 7.



Случайные события — это события, которые при одних и тех же условиях могут произойти, а могут и не произойти. Например: выпадение пятёрки при бросании кубика.
Невозможные события — в данных условиях произойти не могут. Например: выпадение семёрки при бросании кубика.

Достоверные события — в данных условиях произойдут обязательно. Например: выпадение числа меньше семи при бросании кубика.
Одни случайные события более вероятные — ближе к достоверным, а другие менее вероятные — ближе к невозможным.
Противоположные события — пара событий A и B таких, что если происходит событие A, то событие B не происходит и наоборот, одновременно они произойти не могут.
Примеры противоположных событий:
1) при бросании монеты — выпадение «орла», выпадение «решки»;
2) при бросании кубика — выпадение нечётного числа, выпадение чётного числа.
Несовместные события — не могут произойти одновременно ни при одном исходе эксперимента, появление одного из них исключает появление другого события.
Примеры несовместных событий:
1) наугад из набора домино вынимают одну фишку — вынут дубль, вынут не дубль;
2) наугад из колоды карт вынимают одну карту — вынут король, вынут валет.
Независимые события — вероятность каждого из них не зависит от наступления или не наступления другого

события, наступление одного из них не изменяет вероятность наступления другого.
Примеры независимых событий:
1) при двух бросках кубика — в первый раз выпало чётное число; во второй раз выпала пятёрка;
2) наугад из колоды карт вынимают одну карту — вынут туз, вынута карта пиковой масти.

1. Бросают четыре кубика. Какие из событий невозможные:
1) сумма четырёх выпавших чисел больше, чем 4;
2) сумма четырёх выпавших чисел меньше, чем 4;
3) сумма трёх выпавших чисел не меньше, чем 24;
4) сумма трёх выпавших чисел не больше, чем 24?

Решение.

На гранях кубика: 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Сумма четырёх выпавших чисел от 4 до 24 включительно.
Сумма трёх выпавших чисел от 3 до 18 включительно.
События 2 и 3 — невозможные события.
Ответ: 2; 3.

-
-
-

24. Случайным образом выбирается пятизначное число. Какое из событий наиболее вероятно:
1) первые две цифры числа — тройки, а последняя цифра — чётная;
2) первая цифра числа — чётная, а две последние цифры — пятёрки;
3) три первые цифры числа одинаковые;
4) число записывается разными чётными цифрами?

2. Статистическое определение вероятности

Монета в теории вероятностей имеет только две стороны, одна из которых «орёл», другая — «решка». Монету бросают, и она падает одной из сторон вверх.



Чтобы выяснить, насколько вероятно то или иное случайное событие, связанное с экспериментом, нужно подсчитать, как часто оно происходит. При этом рассматривают две величины:

- *абсолютная частота* показывает, сколько раз в серии экспериментов наблюдалось данное событие;
- *относительная частота* показывает, какая доля экспериментов завершилась наступлением данного события.

Относительная частота определяется делением

абсолютной частоты на число экспериментов: n/N.
Например: при бросании монеты «орёл» выпал 11 раз из 20; абсолютная частота равна 11, а относительная частота равна 11/20 = 0,55 = 55%.
Статистическое определение вероятности:
за вероятность случайного события принимается его относительная частота, полученная в серии экспериментов: P=n/N.

- Для невозможного события n=0, относительная частота равна 0, вероятность события равна 0, это событие не произойдет.
- Для достоверного события n=N, относительная частота равна 1, событие обязательно произойдет.
- Для случайного события 0≤n≤N, относительная частота от 0 до 1 включительно, вероятность события от 0 до 1 включительно.

Противоположные события — пара событий A и B таких, что если происходит событие A, то событие B не происходит и наоборот: P(A) + P(B) = 1; P(A) = 1 – P(B).
Вероятность объединения двух несовместных событий равна сумме их вероятностей: P(A ∪ B) = P(A) + P(B).
Вероятность пересечения двух независимых событий

равна произведению их вероятностей:
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

25. Проведён эксперимент по бросанию кубика. Кубик был подброшен 160 раз, чётное число выпало 75 раз. Найдите относительную частоту выпадения нечётного числа в данном эксперименте. Дайте ответ в процентах с точностью до целых.

Решение.

Нечётное число выпало 160 – 75 = 85 раз.
Относительная частота выпадения нечётного числа:
85/160 = 17/32 = 0,53125 ≈ 53%.
Ответ: 53%.

-
-
-

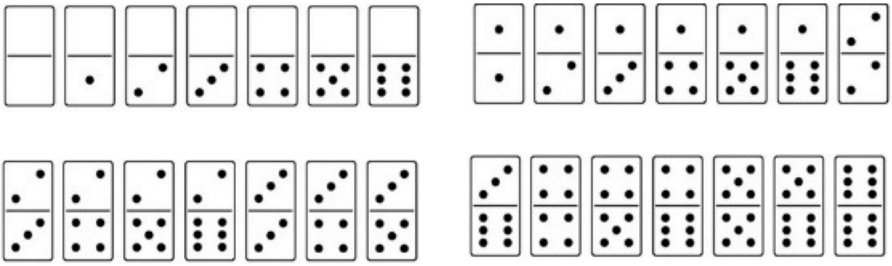
48. Стрелок 4 раза стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,6. Найдите вероятность того, что стрелок первые 3 раза попал в мишени, а последний раз промахнулся.

3. Классическое определение вероятности

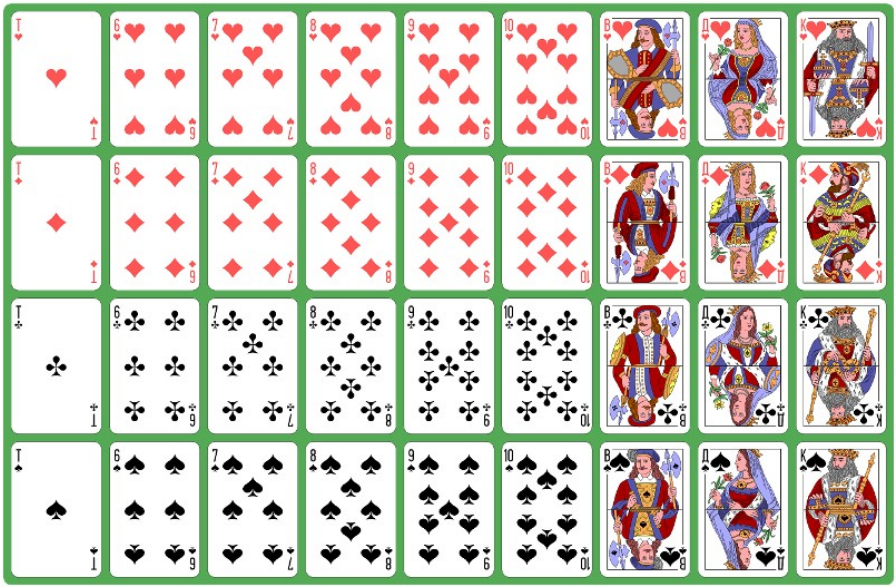
Монета в теории вероятностей имеет только две стороны. Выпадение «орла», выпадение «решки» — равновероятные события. Никакой другой вариант невозможен, монета не может потеряться или встать на ребро.

Кубик игральный в теории вероятностей имеет шесть граней правильной формы. Выпадение каждого из чисел (1, 2, 3, 4, 5, 6) — равновероятные события. Никакой другой вариант невозможен, кубик не может потеряться или встать на ребро.

Домино. В классическом наборе 28 прямоугольных фишек, которые разделены на две части. На каждой части точками отмечены числа от 0 до 6 включительно.



Карты игральные — это классическая игровая колода, которая включает в себя 36 карт, разделенных на 4 масти: бубны (♦), пики (♠), черви (♥) и трефы (♣). Каждая масть содержит карты от 6 до туза.



Рассмотрим случайный эксперимент, который может завершиться одним из n возможных исходов, причём все исходы *равновероятны*, нет никаких оснований считать один исход вероятнее другого.

Например:

1) при бросании монеты число возможных исходов n = 2, может выпасть «орёл» или «решка»;

2) при бросании кубика число возможных исходов n = 6,

может выпасть 1, 2, 3, 4, 5 или 6.
Пусть ровно m из этих n исходов приводят к наступлению некоторого события A, такие исходы называются *благоприятными*.
Классическое определение вероятности: *P(A) = m/n.*
Вероятность случайного события A — это отношение m/n, где n — число всех возможных исходов эксперимента, m — число исходов, благоприятных для события A.
Например:
1) пусть благоприятным исходом будет выпадение «орла» при бросании монеты, m = 1; n = 2; вероятность выпадения «орла» при бросании монеты равна 1/2;
2) пусть благоприятным исходом будет выпадение тройки при бросании кубика, m = 1; n = 6; вероятность выпадения тройки при бросании игрального кубика равна 1/6.
Классическое определение вероятности можно использовать только в случае с равновероятными исходами!

49. Бросают три игральных кубика. Какова вероятность того, что сумма трёх выпавших чисел не равна 3?

Решение.

Число всех возможных исходов: 6 · 6 · 6 = 216.
Один исход — сумма чисел равна 3: 1-1-1.
Вероятность того, что сумма трёх выпавших чисел равна 3:

1/216.
Вероятность противоположного события — сумма трёх выпавших чисел не равна 3: 1 – 1/216 = 215/216.
Ответ: 215/216.

-
-
-

92. В одном ящике 4 белых и 8 чёрных шариков. Во втором — 7 белых и 5 чёрных. Из каждого ящика наугад вынимается по одному шарику. Найдите вероятность того, что шарики будут разных цветов.

4. Геометрическое определение вероятности

Пусть A — случайная точка на отрезке длины L. Вероятность её попадания в любой отрезок длины d, принадлежащий данному отрезку длины L, равна: P(A) = d/L.

Пусть A — случайная точка, принадлежащая плоской фигуре площади S. Вероятность её попадания в область этой фигуры площади s равна: P(A) = s/S.

93. Часы с двенадцатичасовым циферблатом сломались и перестали идти. Найдите вероятность того, что часовая стрелка остановилась, достигнув отметки 3, но не дойдя до отметки 7.

Решение.

4/12 = 1/3 круга.
Вероятность: 1/3 : 1 = 1/3.
Ответ: 1/3.

-
-

-

116. В прямоугольнике с вершинами (0; 0), (2; 0), (2; 1), (0; 1) случайным образом выбирается точка с координатами (x; y). Найдите вероятность того, что координаты этой точки удовлетворяют неравенству $y > 2(x – 1)$.

5. Задачи повышенной сложности

Объединением двух или нескольких событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из них в результате испытания.
Вероятность объединения двух несовместных событий равна сумме их вероятностей: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
Вероятность объединения двух совместных событий равна сумме их вероятностей минус вероятность их пересечения: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) – P(A \cap B)$.

Пересечением двух или нескольких событий называется событие, состоящее в совместном наступлении всех этих событий в результате испытания.
Вероятность пересечения двух независимых событий равна произведению их вероятностей:
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
Вероятность пересечения двух зависимых событий:
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$.
$P(B|A)$ — условная вероятность появления события B, если событие A произошло.
$P(A|B)$ — условная вероятность появления события A, если событие B произошло.

Размещения без повторений из *n* элементов по *k* в каждой (*k≤n, k>0*) — это комбинации, отличающиеся одна от другой составом или порядком расположения элементов.

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-k+1)$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Перестановки без повторений из *n* элементов — это размещения из *n* элементов по *n*; это комбинации из *n* элементов, отличающиеся друг от друга только порядком следования элементов.

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{1} = n!$$

Сочетания без повторений из *n* элементов по *k* элементов — это комбинации из *n* элементов по *k* (*k≤n*), отличающиеся друг от друга только составом элементов.

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

117. В коробке 3 белых и 4 чёрных шара. Наугад вынимают 2 шара. Какова вероятность того, вынуты 2 белых шара?

Решение.

1 способ.
Вероятность того, что первый шар белый: 3/7.
Если первый шар белый, то второй выбирается из оставшихся 6 шаров, из них 2 белых.
$3/7 \cdot 2/6 = 1/7$.

2 способ.
Всего шаров: 3 + 4 = 7.
Число всех возможных исходов — число сочетаний из 7 по 2: $(7 \cdot 6)/(1 \cdot 2) = 21$.
Число благоприятных исходов (2 белых) — число сочетаний из 3 по 2: $(3 \cdot 2)/(1 \cdot 2) = 3$.
Вероятность: 3/21 = 1/7.
Ответ: 1/7.

-
-
-

160. Карточка «Спортлото» содержит 49 чисел. Выигрывают какие-то 6 чисел. Какова вероятность того, что на карточке, где отмечены 6 чисел, верно угадано ровно три или ровно четыре числа? Дайте ответ

в десятичных дробях с точностью до тысячных.

Решения и ответы

5. 3.
На гранях кубика: 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Событие 3 (четырёх различных нечётных чисел) — невозможное событие.

6. 3; 4.
На гранях кубика: 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Сумма четырёх выпавших чисел от 4 до 24 включительно.
События 3 и 4 — достоверные события.

7. 1, 3 — совместные; 2, 4 — несовместные.

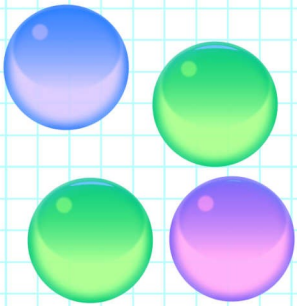
8. 2, 3 — совместные; 1, 4 — несовместные.

9. 1, 4 — совместные; 2, 3 — несовместные.
1) События совместные; может быть валет червей или валет бубей.
2) События несовместные; не может одновременно быть и королём, и тузом.
3) События несовместные; не может одновременно быть чёрной и красной масти.
4) События совместные; может быть пиковая дама.

-
-
-

160. 0,019.
Число всех возможных наборов по 6 чисел — число сочетаний из 49 по 6:
$(49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44)/(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6) = 13983816$.
Число благоприятных исходов (верно угадано ровно три числа) — число сочетаний из 6 по 3 умножить на число сочетаний из (49 – 6) по 3:
$20 \cdot (43 \cdot 42 \cdot 41)/(1 \cdot 2 \cdot 3) = 246820$.
Число благоприятных исходов (верно угадано ровно четыре числа) — число сочетаний из 6 по 4 умножить на число сочетаний из (49 – 6) по 2:
$((6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3)/(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4)) \cdot ((43 \cdot 42)/(1 \cdot 2)) = 13545$.
Число всех благоприятных исходов:
$246820 + 13545 = 260365$.
Вероятность того, что верно угадано ровно три или ровно четыре числа: $260365/13983816 \approx 0{,}019$.

МетаШкола



ISBN 978-5-6051167-5-2