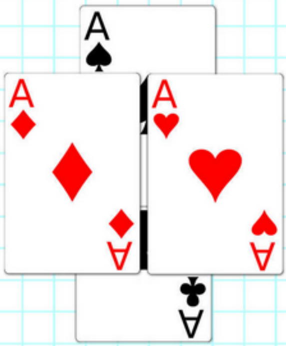
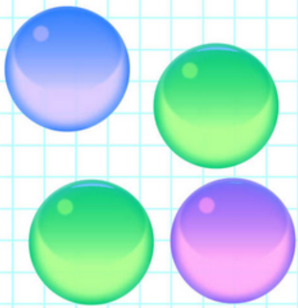
Е. В. Смыкалова

МАТЕМАТИКА

ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ





9

Е. В. Смыкалова

Математика
Задачи
по теории вероятностей

9 класс

Демоверсия

Санкт-Петербург
СМИ МетаШкола
2024

УДК 373.51
ББК 20.я72

Смыкалова Елена Владимировна

С52 Математика. Задачи по теории вероятностей. 9 класс: Сборник задач / Е. В. Смыкалова. – СПб.: СМИ МетаШкола, 2024. – 108 с. – ISBN 978-5-6051167-5-2

Сборник содержит 160 задач по теории вероятностей для 9 класса: задачи на случайные события; задачи на статистическое, классическое и геометрическое определение вероятности. Рассматриваются различные способы решения задач. Приводятся образцы оформления для первых четырёх задач каждой главы. Ко всем задачам есть ответы и подробные решения в конце книги. Книга будет интересна и полезна ученикам 9 класса, их родителям и учителям математики.

ISBN 978-5-6051167-5-2

www.metaschool.ru

Оглавление

Предисловие..5

1. Случайные события...6

2. Статистическое определение вероятности.....................17

3. Классическое определение вероятности........................25

4. Геометрическое определения вероятности....................36

5. Задачи повышенной сложности..44

Решения и ответы..56

Предисловие

Сборник содержит 160 задач по теории вероятностей для 9 класса. В первой главе — задачи на случайные события; во второй главе — задачи на статистическое определение вероятности; в третьей — задачи на классическое определение вероятности; в четвёртой — задачи на геометрическое определение вероятности; в пятой — задачи повышенной сложности.

Рассматриваются различные способы решения задач. Приводятся образцы оформления для первых четырёх задач каждой главы. Ко всем задачам есть ответы и подробные решения в конце книги. Книга будет интересна и полезна ученикам 9 класса, их родителям и учителям математики.

Это шестая книга серии «Задачи по теории вероятностей» 4 – 9 классы.
Материал книги был апробирован на уроках математики, на занятиях математического кружка в Физико-математическом лицее № 366 Санкт-Петербурга и в интернет-кружке МетаШколы www.metaschool.ru.

Желаем успехов в изучении математики!

1. Случайные события

Кубик игральный в теории вероятностей имеет шесть граней правильной формы. На каждой грани выбито точками число, и при бросании кубика выпадает одно из шести чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Сумма чисел на противоположных гранях равна 7.

Случайные события — это события, которые при одних и тех же условиях могут произойти, а могут и не произойти. Например: выпадение пятёрки при бросании кубика.
Невозможные события — в данных условиях произойти не могут. Например: выпадение семёрки при бросании кубика.

Достоверные события — в данных условиях произойдут обязательно. Например: выпадение числа меньше семи при бросании кубика.
Одни случайные события более вероятные — ближе к достоверным, а другие менее вероятные — ближе к невозможным.
Противоположные события — пара событий A и B таких, что если происходит событие A, то событие B не происходит и наоборот, одновременно они произойти не могут.
Примеры противоположных событий:
1) при бросании монеты — выпадение «орла», выпадение «решки»;
2) при бросании кубика — выпадение нечётного числа, выпадение чётного числа.
Несовместные события — не могут произойти одновременно ни при одном исходе эксперимента, появление одного из них исключает появление другого события.
Примеры несовместных событий:
1) наугад из набора домино вынимают одну фишку — вынут дубль, вынут не дубль;
2) наугад из колоды карт вынимают одну карту — вынут король, вынут валет.
Независимые события — вероятность каждого из них не зависит от наступления или не наступления другого

события, наступление одного из них не изменяет вероятность наступления другого.
Примеры независимых событий:
1) при бросании кубика — выпадение чётного числа, выпадение пяти;
2) наугад из колоды карт вынимают одну карту — вынут туз, вынута карта пиковой масти.

1. Бросают четыре кубика. Какое из событий невозможное:
1) сумма четырёх выпавших чисел больше, чем 4;
2) сумма четырёх выпавших чисел меньше, чем 4;
3) сумма трёх выпавших чисел не меньше, чем 24;
4) сумма трёх выпавших чисел не больше, чем 24?

Решение.

На гранях кубика: 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Сумма четырёх выпавших чисел от 4 до 24 включительно.
Событие 2 (сумма четырёх выпавших чисел меньше, чем 4) — невозможное событие.
Ответ: 2.

•
•
•

24. Случайным образом выбирается пятизначное число.

Какое из событий наиболее вероятно:

1) первые две цифры числа — тройки, а последняя цифра — чётная;

2) первая цифра числа — чётная, а две последние цифры — пятёрки;

3) три первые цифры числа одинаковые;

4) число записывается разными чётными цифрами?

2. Статистическое определение вероятности

Монета в теории вероятностей имеет только две стороны, одна из которых «орёл», другая — «решка». Монету бросают, и она падает одной из сторон вверх.

Чтобы выяснить, насколько вероятно то или иное случайное событие, связанное с экспериментом, нужно подсчитать, как часто оно происходит. При этом рассматривают две величины:

- *абсолютная частота* показывает, сколько раз в серии экспериментов наблюдалось данное событие;
- *относительная частота* показывает, какая доля экспериментов завершилась наступлением данного события.

Относительная частота определяется делением абсолютной частоты на число экспериментов: n/N. Например: при бросании монеты «орёл» выпал 11 раз из 20; абсолютная частота равна 11, а относительная частота равна 11/20 = 0,55 = 55%.
Статистическое определение вероятности: за вероятность случайного события принимается его относительная частота, полученная в серии экспериментов: P=n/N.

- Для невозможного события n=0, относительная частота равна 0, вероятность события равна 0, это событие не произойдет.
- Для достоверного события n=N, относительная частота равна 1, событие обязательно произойдет.
- Для случайного события 0≤n≤N, относительная частота от 0 до 1 включительно, вероятность события от 0 до 1 включительно.

Противоположные события — пара событий A и B таких, что если происходит событие A, то событие B не происходит и наоборот: P(A) + P(B) = 1; P(A) = 1 – P(B).
Вероятность объединения двух несовместных событий равна сумме их вероятностей: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Вероятность пересечения двух независимых событий равна произведению их вероятностей: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

25. Проведён эксперимент по бросанию кубика. Кубик был подброшен 160 раз, чётное число выпало 75 раз. Найдите относительную частоту выпадения нечётного числа в данном эксперименте. Дайте ответ в процентах с точностью до целых.

Решение.

Нечётное число выпало 160 – 75 = 85 раз.
Относительная частота выпадения нечётного числа:
$85/160 = 17/32 = 0{,}53125 \approx 53\%$.
Ответ: 53%.

-
-
-

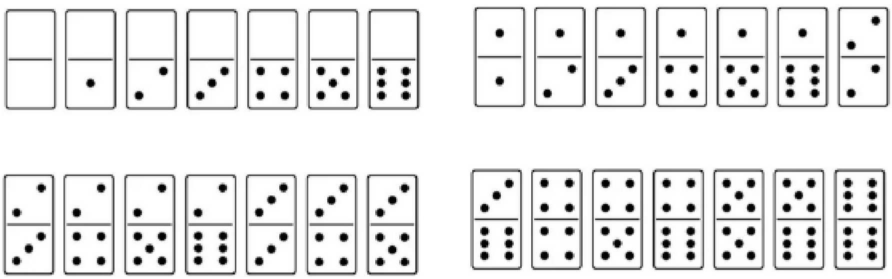
48. Стрелок 4 раза стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,6. Найдите вероятность того, что стрелок первые 3 раза попал в мишени, а последний раз промахнулся.

3. Классическое определение вероятности

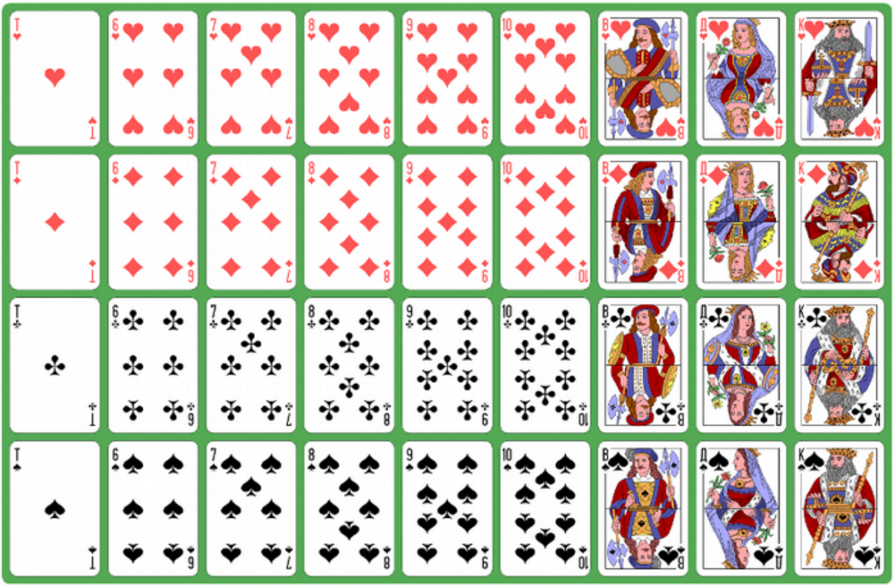
Монета в теории вероятностей имеет только две стороны. Выпадение «орла», выпадение «решки» — равновероятные события. Никакой другой вариант невозможен, монета не может потеряться или встать на ребро.

Кубик игральный в теории вероятностей имеет шесть граней правильной формы. Выпадение каждого из чисел (1, 2, 3, 4, 5, 6) — равновероятные события. Никакой другой вариант невозможен, кубик не может потеряться или встать на ребро.

Домино. В классическом наборе 28 прямоугольных фишек, которые разделены на две части. На каждой части точками отмечены числа от 0 до 6 включительно.



Карты игральные — это классическая игровая колода, которая включает в себя 36 карт, разделенных на 4 масти: бубны (♦), пики (♠), черви (♥) и трефы (♣). Каждая масть содержит карты от 6 до туза.



Рассмотрим случайный эксперимент, который может завершиться одним из n возможных исходов, причём все исходы *равновероятны*, нет никаких оснований считать один исход вероятнее другого.
Например:
1) при бросании монеты число возможных исходов $n = 2$, может выпасть «орёл» или «решка»;

2) при бросании кубика число возможных исходов n = 6, может выпасть 1, 2, 3, 4, 5 или 6.
Пусть ровно m из этих n исходов приводят к наступлению некоторого события A, такие исходы называются *благоприятными*.
Классическое определение вероятности: *P(A) = m/n.*
Вероятность случайного события A — это отношение m/n, где n — число всех возможных исходов эксперимента, m — число исходов, благоприятных для события A.
Например:
1) пусть благоприятным исходом будет выпадение «орла» при бросании монеты, m = 1; вероятность выпадения «орла» при бросании монеты равна 1/2;
2) пусть благоприятным исходом будет выпадение тройки при бросании кубика, m = 1; вероятность выпадения тройки при бросании игрального кубика равна 1/6.
Классическое определение вероятности можно использовать только в случае с равновероятными исходами!

49. Бросают три игральных кубика. Какова вероятность того, что сумма трёх выпавших чисел не равна 3?

Решение.

Число всех возможных исходов: 6 · 6 · 6 = 216.
Один исход — сумма чисел равна 3: 1-1-1.

Вероятность того, что сумма трёх выпавших чисел равна 3: 1/216.
Вероятность того, что сумма трёх выпавших чисел не равна 3: 1 – 1/216 = 215/216.
Ответ: 215/216.

-
-
-

92. В одном ящике 4 белых и 8 чёрных шариков. Во втором — 7 белых и 5 чёрных. Из каждого ящика наугад вынимается по одному шарику. Найдите вероятность того, что шарики будут разных цветов.

4. Геометрическое определения вероятности

Пусть A — случайная точка на отрезке длины L. Вероятность её попадания в любой отрезок длины d, принадлежащий данному отрезку длины L, равна:
P(A) = d/L.

Пусть A — случайная точка, принадлежащая плоской фигуре площади S. Вероятность её попадания в область этой фигуры площади s равна: P(A) = s/S.

93. Часы с двенадцатичасовым циферблатом сломались и перестали идти. Найдите вероятность того, что часовая стрелка остановилась, достигнув отметки 3, но не дойдя до отметки 7.

Решение.

4/12 = 1/3 круга.
Вероятность: 1/3 : 1 = 1/3.
Ответ: 1/3.

•

116. В прямоугольнике с вершинами (0; 0), (2; 0), (2; 1), (0; 1) случайным образом выбирается точка с координатами $(x; y)$. Найдите вероятность того, что координаты этой точки удовлетворяют неравенству $y > 2(x - 1)$.

5. Задачи повышенной сложности

Объединением двух или нескольких событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из них в результате испытания.
Вероятность объединения двух несовместных событий равна сумме их вероятностей: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
Вероятность объединения двух совместных событий равна сумме их вероятностей минус вероятность их пересечения: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Пересечением двух или нескольких событий называется событие, состоящее в совместном наступлении всех этих событий в результате испытания.
Вероятность пересечения двух независимых событий равна произведению их вероятностей: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
Вероятность пересечения двух зависимых событий:
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$.
$P(B|A)$ — условная вероятность появления события B, если события A произошло.
$P(A|B)$ — условная вероятность появления события A, если события B произошло.

Размещения без повторений из *n* элементов по *k* в каждой (*k*≤*n, k*>*0*) — это комбинации, отличающиеся одна от другой составом или порядком расположения элементов.

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-k+1)$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Перестановки без повторений из *n* элементов — это размещения из *n* элементов по *n*; это комбинации из *n* элементов, отличающиеся друг от друга только порядком следования элементов.

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{1} = n!$$

Сочетания без повторений из *n* элементов по *k* элементов — это комбинации из *n* элементов по *k* (*k*≤*n*), отличающиеся друг от друга только составом элементов.

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

117. В коробке 3 белых и 4 чёрных шара. Наугад вынимают 2 шара. Какова вероятность того, вынуты 2 белых шара?

Решение.

1 способ.
Вероятность того, что первый шар белый: 3/7.
Если первый шар белый, то второй выбирается из оставшихся 6 шаров, из них 2 белых.
3/7 · 2/6 = 1/7.

2 способ.
Всего шаров: 3 + 4 = 7.
Число всех возможных исходов — число сочетаний из 7 по 2: (7 · 6)/(1 · 2) = 21.
Число благоприятных исходов (2 белых) — число сочетаний из 3 по 2: (3 · 2)/(1 · 2) = 3.
Вероятность: 3/21 = 1/7.
Ответ: 1/7.

-
-
-

160. Карточка «Спортлото» содержит 49 чисел. Выигрывают какие-то 6 чисел. Какова вероятность того, что на карточке, где отмечены 6 чисел, верно угадано ровно три или ровно четыре числа? Дайте ответ

в десятичных дробях с точностью до тысячных.

Решения и ответы

5. 3.
На гранях кубика: 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Событие 3 (трёх различных нечётных чисел) — невозможное событие.

6. 3; 4.
На гранях кубика: 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Сумма четырёх выпавших чисел от 4 до 24 включительно.
События 3 и 4 — достоверные события.

7. 1, 3 — совместные; 2, 4 — несовместные.

8. 2, 3 — совместные; 1, 4 — несовместные.

9. 1, 4 — совместные; 2, 3 — несовместные.
1) События совместные; может быть валет червей или валет бубей.
2) События несовместные; не может одновременно быть и королём, и тузом.
3) События несовместные; не может одновременно быть чёрной и красной масти.
4) События совместные; может быть пиковая дама.

•
•
•

160. 0,019.

Число всех возможных наборов по 6 чисел — число сочетаний из 49 по 6:

$(49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44)/(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6) = 13983816$.

Число благоприятных исходов (верно угадано ровно три числа) — число сочетаний из 6 по 3 умножить на число сочетаний из (49 – 6) по 3:

$20 \cdot (43 \cdot 42 \cdot 41)/(1 \cdot 2 \cdot 3) = 246820$.

Число благоприятных исходов (верно угадано ровно четыре числа) — число сочетаний из 6 по 4 умножить на число сочетаний из (49 – 6) по 2:

$((6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3)/(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4)) \cdot ((43 \cdot 42)/(1 \cdot 2)) = 13545$.

Число всех благоприятных исходов:

$246820 + 13545 = 260365$.

Вероятность того, что верно угадано ровно три или ровно четыре числа: $260365/13983816 \approx 0{,}019$.

МетаШкола

ISBN 978-5-6051167-5-2

9 785605 116752 >