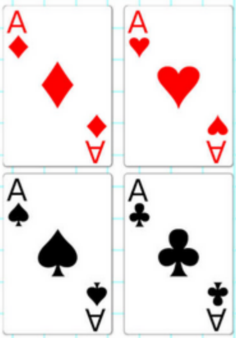
Е. В. Смыкалова

МАТЕМАТИКА

ЗАДАЧИ
ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ



Е. В. Смыкалова

Математика
Задачи
по теории вероятностей

8 класс

Демоверсия

Санкт-Петербург
СМИ МетаШкола
2024

УДК 373.51
ББК 20.я72

Смыкалова Елена Владимировна

С52 Математика. Задачи по теории вероятностей.
8 класс: Сборник задач / Е. В. Смыкалова. – СПб.: СМИ МетаШкола, 2024. – 105 с. – ISBN 978-5-6051167-4-5

Сборник содержит 160 задач по теории вероятностей для 8 класса: задачи на случайные события; задачи на статистическое, классическое и геометрическое определение вероятности. Рассматриваются различные способы решения задач. Приводятся образцы оформления для первых четырёх задач каждой главы. Ко всем задачам есть ответы и подробные решения в конце книги. Книга будет интересна и полезна ученикам 8 класса, их родителям и учителям математики.

ISBN 978-5-6051167-4-5

www.metaschool.ru

Оглавление

Предисловие

Сборник содержит 160 задач по теории вероятностей для 8 класса. В первой главе — задачи на случайные события; во второй главе — задачи на статистическое определение вероятности; в третьей — задачи на классическое определение вероятности; в четвёртой — задачи на геометрическое определение вероятности; в пятой — задачи повышенной сложности.

Рассматриваются различные способы решения задач. Приводятся образцы оформления для первых четырёх задач каждой главы. Ко всем задачам есть ответы и подробные решения в конце книги. Книга будет интересна и полезна ученикам 8 класса, их родителям и учителям математики.

Это пятая книга серии «Задачи по теории вероятностей» 4 – 9 классы.
Материал книги был апробирован на уроках математики, на занятиях математического кружка в Физико-математическом лицее № 366 Санкт-Петербурга и в интернет-кружке МетаШколы www.metaschool.ru.

Желаем успехов в изучении математики!

1. Случайные события

Кубик игральный в теории вероятностей имеет шесть граней правильной формы. На каждой грани выбито точками число, и при бросании кубика выпадает одно из шести чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Сумма чисел на противоположных гранях равна 7.

Случайные события — это события, которые при одних и тех же условиях могут произойти, а могут и не произойти. Например: выпадение пятёрки при бросании кубика.
Невозможные события — в данных условиях произойти не могут. Например: выпадение семёрки при бросании кубика.

Достоверные события — в данных условиях произойдут обязательно. Например: выпадение числа меньше семи при бросании кубика.

Одни случайные события более вероятные — ближе к достоверным, а другие менее вероятные — ближе к невозможным.

Противоположные события — пара событий A и B таких, что если происходит событие A, то событие B не происходит и наоборот, одновременно они произойти не могут.

Примеры противоположных событий:

1) при бросании монеты — выпадение «орла», выпадение «решки»;

2) при бросании кубика — выпадение нечётного числа, выпадение чётного числа.

Несовместные события — не могут произойти одновременно ни при одном исходе эксперимента, появление одного из них исключает появление другого события.

Примеры несовместных событий:

1) наугад из набора домино вынимают одну фишку — вынут дубль, вынут не дубль;

2) наугад из колоды карт вынимают одну карту — вынут король, вынут валет.

Независимые события — вероятность каждого из них не зависит от наступления или не наступления другого события, наступление одного из них не изменяет вероятность наступления другого.

Примеры независимых событий:

1) при бросании кубика — выпадение чётного числа, выпадение пяти;

2) наугад из колоды карт вынимают одну карту — вынут туз, вынута карта пиковой масти.

1. Какие из описанных пар событий являются совместными, а какие несовместными.

Из набора домино взята одна фишка, на ней:

1) одно число больше, чем 4; другое число 2;

2) одно число меньше, чем 3; другое число больше, чем 5;

3) одно число 5; сумма двух чисел равна 12;

4) оба числа меньше, чем 4; сумма двух чисел равна 7.

Решение.

1) События совместные; 5-2, 6-2.

2) События совместные; 0-6, 1-6, 2-6.

3) События несовместные; 12 – 5 = 7; числа 7 на фишках домино нет.

4) События несовместные; если оба числа меньше, чем 4, то их сумма не больше, чем 6.

Ответ: 1, 2 — совместные; 3, 4 — несовместные.

-

-
-

24. Случайным образом выбирается четырёхзначное число. Какое событие наиболее вероятно:
1) первая цифра числа 3, а последняя цифра чётная;
2) первая цифра числа чётная, а последняя цифра 3;
3) две первые цифры числа одинаковые;
4) три последние цифры числа одинаковые?

2. Статистическое определение вероятности

Монета в теории вероятностей имеет только две стороны, одна из которых «орёл», другая — «решка». Монету бросают, и она падает одной из сторон вверх.

Чтобы выяснить, насколько вероятно то или иное случайное событие, связанное с экспериментом, нужно подсчитать, как часто оно происходит. При этом рассматривают две величины:

- *абсолютная частота* показывает, сколько раз в серии экспериментов наблюдалось данное событие;
- *относительная частота* показывает, какая доля экспериментов завершилась наступлением данного события.

Относительная частота определяется делением абсолютной частоты на число экспериментов: n/N. Например: при бросании монеты «орёл» выпал 11 раз из 20; абсолютная частота равна 11, а относительная частота равна 11/20 = 0,55 = 55%.
Статистическое определение вероятности: за вероятность случайного события принимается его относительная частота, полученная в серии экспериментов: P=n/N.

- Для невозможного события n=0, относительная частота равна 0, вероятность события равна 0, это событие не произойдет.
- Для достоверного события n=N, относительная частота равна 1, событие обязательно произойдет.
- Для случайного события 0≤n≤N, относительная частота от 0 до 1 включительно, вероятность события от 0 до 1 включительно.

Противоположные события — пара событий A и B таких, что если происходит событие A, то событие B не происходит и наоборот: P(A) + P(B) = 1; P(A) = 1 – P(B).
Вероятность объединения двух несовместных событий равна сумме их вероятностей: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Вероятность пересечения двух независимых событий равна произведению их вероятностей: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

25. Проведён эксперимент по бросанию кубика. Кубик был подброшен 80 раз, чётное число выпало 45 раз. Найдите относительную частоту выпадения нечётного числа в данном эксперименте. Дайте ответ в процентах с точностью до целых.

Решение.

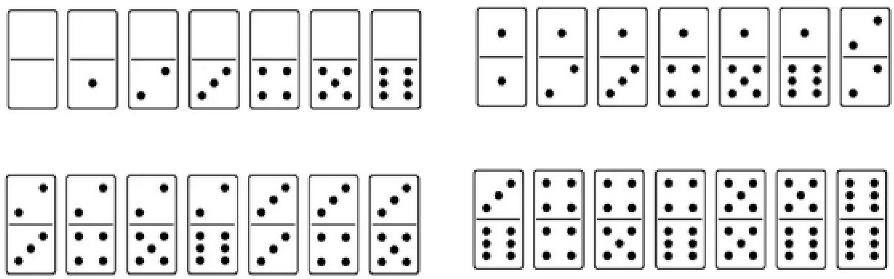
Нечётное число выпало 80 – 45 = 35 раз.
Относительная частота выпадения нечётного числа:
$35/80 = 7/16 = 0{,}4375 \approx 44\%$.
Ответ: 44%.

-
-
-

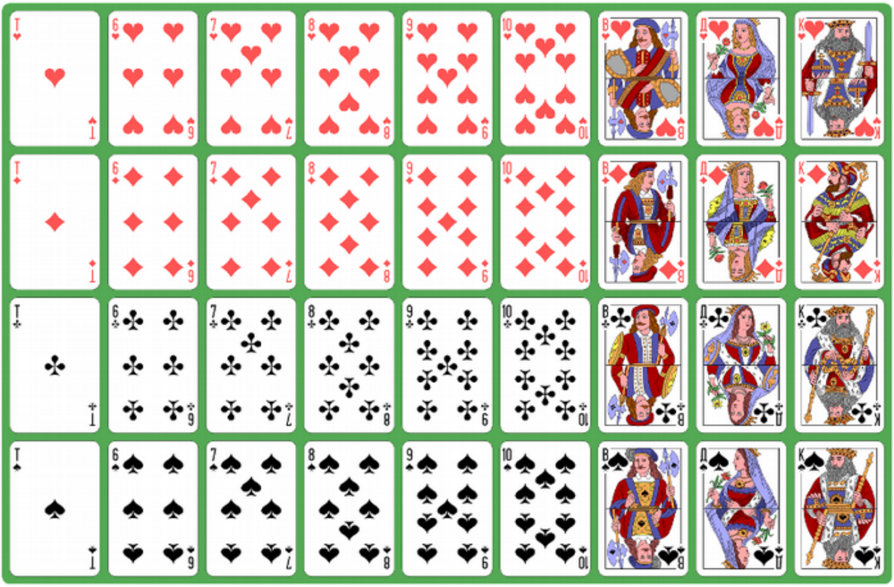
48. При изготовлении детали совершается три операции. Вероятность брака при первой операции равна 0,01, при второй — 0,02, при третьей — 0,05. Какова вероятность того, что после трёх операций деталь будет без брака? Дайте ответ в процентах с точностью до целых.

3. Классическое определение вероятности

Монета в теории вероятностей имеет только две стороны. Выпадение «орла», выпадение «решки» — равновероятные события. Никакой другой вариант невозможен, монета не может потеряться или встать на ребро.
Кубик игральный в теории вероятностей имеет шесть граней правильной формы. Выпадение каждого из чисел (1, 2, 3, 4, 5, 6) — равновероятные события. Никакой другой вариант невозможен, кубик не может потеряться или встать на ребро.
Домино. В классическом наборе 28 прямоугольных фишек, которые разделены на две части. На каждой части точками отмечены числа от 0 до 6 включительно.



Карты игральные — это классическая игровая колода, которая включает в себя 36 карт, разделенных на 4 масти: бубны (♦), пики (♠), черви (♥) и трефы (♣). Каждая масть содержит карты от 6 до туза.



Рассмотрим случайный эксперимент, который может завершиться одним из n возможных исходов, причём все исходы *равновероятны*, нет никаких оснований считать один исход вероятнее другого.

Например:

1) при бросании монеты число возможных исходов n = 2, может выпасть «орёл» или «решка»;

2) при бросании кубика число возможных исходов n = 6, может выпасть 1, 2, 3, 4, 5 или 6.
Пусть ровно m из этих n исходов приводят к наступлению некоторого события A, такие исходы называются *благоприятными*.
Классическое определение вероятности: *P(A) = m/n.*
Вероятность случайного события A — это отношение m/n, где n — число всех возможных исходов эксперимента, m — число исходов, благоприятных для события A.
Например:
1) пусть благоприятным исходом будет выпадение «орла» при бросании монеты, m = 1; вероятность выпадения «орла» при бросании монеты равна 1/2;
2) пусть благоприятным исходом будет выпадение тройки при бросании кубика, m = 1; вероятность выпадения тройки при бросании игрального кубика равна 1/6.
Классическое определение вероятности можно использовать только в случае с равновероятными исходами!

49. Кубик подбрасывали 4 раза, и каждый раз выпадало нечётное число. Какова вероятность того, что при новом бросании выпадет число, которое кратно четырём?

Решение.

Число всех возможных исходов: 6.

Число, которое кратно четырём — это число 4.
Благоприятный исход: 1.
События независимые. Вероятность выпадения каждого числа при бросании равна 1/6 независимо от предыдущих результатов.
Ответ: 1/6.

92. В магазине продаётся 150 ручек: 44 красных, 36 зелёных, 28 фиолетовых, остальные синие и чёрные, их поровну. Найдите вероятность того, что случайно выбранная ручка будет зелёной или чёрной.

4. Геометрическое определения вероятности

Пусть A — случайная точка на отрезке длины L. Вероятность её попадания в любой отрезок длины d, принадлежащий данному отрезку длины L, равна:
P(A) = d/L.

Пусть A — случайная точка, принадлежащая плоской фигуре площади S. Вероятность её попадания в область этой фигуры площади s равна: P(A) = s/S.

93. На отрезке AB отмечены точки M, N и P. AB = 19 см, AM = 4 см, MP = 10 см, NB = 7 см. Точки на отрезке AB идут в таком порядке: A, M, N, P, B. На отрезке AB случайным образом отмечается точка K. Какова вероятность того, что точка K попадёт на отрезок NP?

Решение.

AB = 19 см;
PB = AB – AM – MP = 19 см – 4 см – 10 см = 5 см;
NP = NB – PB = 7 см – 5 см = 2 см.

Вероятность: 2/19.
Ответ: 2/19.

-
-
-

116. Радиусы двух концентрических окружностей относятся как 5 : 3, а ширина кольца равна 8 см. Случайным образом внутри большего круга отмечается точка. Какова вероятность того, что она не попадёт в кольцо?

5. Задачи повышенной сложности

Объединением двух или нескольких событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из них в результате испытания.
Вероятность объединения двух несовместных событий равна сумме их вероятностей: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
Вероятность объединения двух совместных событий равна сумме их вероятностей минус вероятность их пересечения: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) – P(A \cap B)$.

Пересечением двух или нескольких событий называется событие, состоящее в совместном наступлении всех этих событий в результате испытания.
Вероятность пересечения двух независимых событий равна произведению их вероятностей: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
Вероятность пересечения двух зависимых событий:
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$.
$P(B|A)$ — условная вероятность появления события B, если события A произошло.
$P(A|B)$ — условная вероятность появления события A, если события B произошло.

Размещения без повторений из *n* элементов по *k* в каждой (*k≤n, k>0*) — это комбинации, отличающиеся одна от другой составом или порядком расположения элементов.

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ \dots\ (n-k+1)$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Перестановки без повторений из *n* элементов — это размещения из *n* элементов по *n*; это комбинации из *n* элементов, отличающиеся друг от друга только порядком следования элементов.

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{1} = n!$$

Сочетания без повторений из *n* элементов по *k* элементов — это комбинации из *n* элементов по *k* (*k≤n*), отличающиеся друг от друга только составом элементов.

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

117. Вероятность того, что на контрольной работе Ваня решит больше 6 задач равна 0,66. Вероятность того, что он верно решит больше 5 задач, равна 0,79. Найдите вероятность того, что Ваня решит ровно 6 задач.

Решение.

Решит больше 6 задач: 7, 8, 9, …
Решит больше 5 задач: 6, 7, 8, 9, …
Вероятность того, что ровно 6 задач: 0,79 – 0,66 = 0,13.
Ответ: 0,13.

-
-
-

160. Карточка «Спортлото» содержит 49 чисел. Выигрывают какие-то 6 чисел. Какова вероятность того, что на карточке, где отмечены 6 чисел, верно угадано ровно три числа? Дайте ответ в десятичных дробях с точностью до тысячных.

Решения и ответы

5. 3.
На гранях кубика: 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Событие 3 (выпадение пятёрки, шестёрки и семёрки) — невозможное событие.

6. 4.
На гранях кубика: 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Сумма трёх выпавших чисел от 3 до 18 включительно.
Событие 4 (сумма трёх выпавших чисел не больше, чем 18) — достоверное событие.

7. 1, 2 — совместные; 3, 4 — несовместные.
1) События совместные; 4-5, 5-5, 6-5.
2) События совместные; 6-0, 6-1, 6-2, 6-3, 6-4, 6-5, 6-6.
3) События несовместные; 9 – 2 = 7; числа 7 на фишках домино нет.
4) События несовместные; если оба числа больше, чем 3, то их сумма не меньше, чем 8.

-
-
-

160. 0,018.
Число всех возможных наборов по 6 чисел —
число сочетаний из 49 по 6:
(49 · 48 · 47 · 46 · 45 · 44)/(1 · 2 · 3 · 4 · 5 · 6) = 13983816.
Число благоприятных исходов (верно угадано три числа)
— число сочетаний из 6 по 3 умножить на число сочетаний
из (49 – 6) по 3: 20 · (43 · 42 · 41)/(1 · 2 · 3) = 246820.
Вероятность того, что верно угадано три числа:
246820/13983816 ≈ 0,018.

МетаШкола

ISBN 978-5-6051167-4-5
9 785605 116745 >