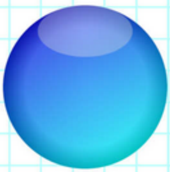
Е. В. Смыкалова

МАТЕМАТИКА

ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ



Е. В. Смыкалова

Математика
Задачи
по теории вероятностей

7 класс

Демоверсия

Санкт-Петербург
СМИ МетаШкола
2024

УДК 373.51
ББК 20.я72

Смыкалова Елена Владимировна

С52 Математика. Задачи по теории вероятностей. 7 класс: Сборник задач / Е. В. Смыкалова. – СПб.: СМИ МетаШкола, 2024. – 99 с. – ISBN 978-5-6051167-3-8

Сборник содержит 160 задач по теории вероятностей для 7 класса: задачи на случайные события; задачи на статистическое, классическое и геометрическое определение вероятности. Рассматриваются различные способы решения задач. Приводятся образцы оформления для первых четырёх задач каждой главы. Ко всем задачам есть ответы и подробные решения в конце книги. Книга будет интересна и полезна ученикам 7 класса, их родителям и учителям математики.

ISBN 978-5-6051167-3-8

www.metaschool.ru

Оглавление

Предисловие

Сборник содержит 160 задач по теории вероятностей для 7 класса. В первой главе — задачи на случайные события; во второй главе — задачи на статистическое определение вероятности; в третьей — задачи на классическое определение вероятности; в четвёртой — задачи на геометрическое определение вероятности; в пятой — задачи повышенной сложности.

Рассматриваются различные способы решения задач. Приводятся образцы оформления для первых четырёх задач каждой главы. Ко всем задачам есть ответы и подробные решения в конце книги. Книга будет интересна и полезна ученикам 7 класса, их родителям и учителям математики.

Это четвёртая книга серии «Задачи по теории вероятностей» 4 – 9 классы.
Материал книги был апробирован на уроках математики, на занятиях математического кружка в Физико-математическом лицее № 366 Санкт-Петербурга и в интернет-кружке МетаШколы www.metaschool.ru.

Желаем успехов в изучении математики!

1. Случайные события

Кубик игральный в теории вероятностей имеет шесть граней правильной формы. На каждой грани выбито точками число, и при бросании кубика выпадает одно из шести чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Сумма чисел на противоположных гранях равна 7.

Случайные события — это события, которые при одних и тех же условиях могут произойти, а могут и не произойти. Например: выпадение пятёрки при бросании кубика.
Невозможные события — в данных условиях произойти не могут. Например: выпадение семёрки при бросании кубика.

Достоверные события — в данных условиях произойдут обязательно. Например: выпадение числа меньше семи при бросании кубика.

Одни случайные события более вероятные — ближе к достоверным, а другие менее вероятные — ближе к невозможным.

Противоположные события — пара событий A и B таких, что если происходит событие A, то событие B не происходит и наоборот, одновременно они произойти не могут.

Примеры противоположных событий:

1) при бросании монеты — выпадение «орла», выпадение «решки»;

2) при бросании кубика — выпадение нечётного числа, выпадение чётного числа.

Несовместные события — не могут произойти одновременно ни при одном исходе эксперимента, появление одного из них исключает появление другого события.

Примеры несовместных событий:

1) наугад из набора домино вынимают одну фишку — вынут дубль, вынут не дубль;

2) наугад из колоды карт вынимают одну карту — вынут король, вынут валет.

Независимые события — вероятность каждого из них не зависит от наступления или не наступления другого

события, наступление одного из них не изменяет вероятность наступления другого.
Примеры независимых событий:
1) при бросании кубика — выпадение чётного числа, выпадение пяти;
2) наугад из колоды карт вынимают одну карту — вынут туз, вынута карта пиковой масти.

1. Бросают два кубика. Какое из событий достоверное:
1) сумма двух выпавших чисел больше, чем 2;
2) сумма двух выпавших чисел меньше, чем 12;
3) сумма двух выпавших чисел не больше, чем 12;
4) сумма двух выпавших чисел чётное число?

Решение.

На гранях кубика: 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Сумма двух выпавших чисел от 2 до 12 включительно.
Событие 3 (сумма двух выпавших чисел не больше, чем 12) — достоверное событие.
Ответ: 3.

-
-
-

24. Случайным образом выбирается трёхзначное число.

Какое из событий наиболее вероятно:
1) число нечётное и меньше, чем 500;
2) число чётное и не меньше, чем 500;
3) первая цифра числа 2 или 4, а последняя цифра — нечётная;
4) первая цифра числа чётная, а последняя цифра — 1, 3 или 5?

2. Статистическое определение вероятности

Монета в теории вероятностей имеет только две стороны, одна из которых «орёл», другая — «решка». Монету бросают, и она падает одной из сторон вверх.

Чтобы выяснить, насколько вероятно то или иное случайное событие, связанное с экспериментом, нужно подсчитать, как часто оно происходит. При этом рассматривают две величины:

- *абсолютная частота* показывает, сколько раз в серии экспериментов наблюдалось данное событие;
- *относительная частота* показывает, какая доля экспериментов завершилась наступлением данного события.

Относительная частота определяется делением абсолютной частоты на число экспериментов: n/N. Например: при бросании монеты «орёл» выпал 11 раз из 20; абсолютная частота равна 11, а относительная частота равна 11/20 = 0,55 = 55%.
Статистическое определение вероятности: за вероятность случайного события принимается его относительная частота, полученная в серии экспериментов: P=n/N.

- Для невозможного события n=0, относительная частота равна 0, вероятность события равна 0, это событие не произойдет.
- Для достоверного события n=N, относительная частота равна 1, событие обязательно произойдет.
- Для случайного события 0≤n≤N, относительная частота от 0 до 1 включительно, вероятность события от 0 до 1 включительно.

Противоположные события — пара событий A и B таких, что если происходит событие A, то событие B не происходит и наоборот: P(A) + P(B) = 1; P(A) = 1 – P(B).
Вероятность объединения двух несовместных событий равна сумме их вероятностей: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Вероятность пересечения двух независимых событий равна произведению их вероятностей: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

25. Проведён эксперимент по бросанию монеты. «Орёл» выпал 120 раз, а «решка» — 130 раз. Найдите относительную частоту выпадения «решки» в данном эксперименте.

Решение.

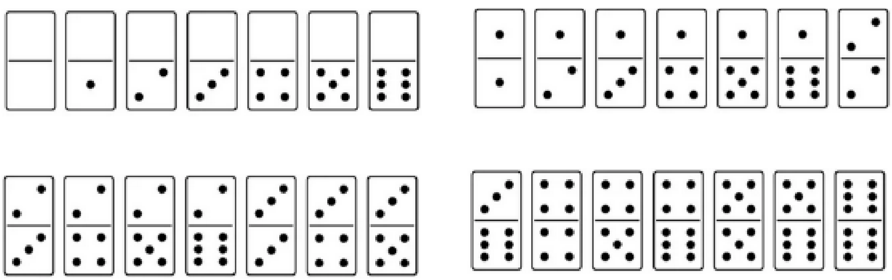
Монету подбрасывали: 120 + 130 = 250 раз.
Относительная частота выпадения «решки»:
130/250 = 13/25 = 0,52 = 52%.
Ответ: 52%.

-
-
-

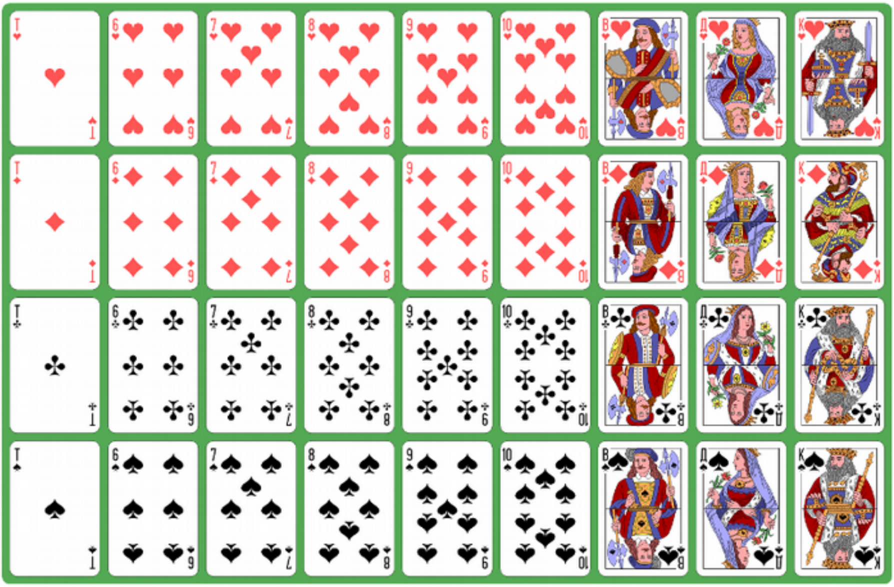
48. Вероятность остановки за смену одного станка, работающего в цехе, равна 0,1, а другого — 0,15. Какова вероятность того, что оба станка за смену не остановятся?

3. Классическое определение вероятности

Монета в теории вероятностей имеет только две стороны. Выпадение «орла», выпадение «решки» — равновероятные события. Никакой другой вариант невозможен, монета не может потеряться или встать на ребро.
Кубик игральный в теории вероятностей имеет шесть граней правильной формы. Выпадение каждого из чисел (1, 2, 3, 4, 5, 6) — равновероятные события. Никакой другой вариант невозможен, кубик не может потеряться или встать на ребро.
Домино. В классическом наборе 28 прямоугольных фишек, которые разделены на две части. На каждой части точками отмечены числа от 0 до 6 включительно.



Карты игральные — это классическая игровая колода, которая включает в себя 36 карт, разделенных на 4 масти: бубны (♦), пики (♠), черви (♥) и трефы (♣). Каждая масть содержит карты от 6 до туза.



Рассмотрим случайный эксперимент, который может завершиться одним из n возможных исходов, причём все исходы *равновероятны*, нет никаких оснований считать один исход вероятнее другого.
Например:
1) при бросании монеты число возможных исходов $n = 2$, может выпасть «орёл» или «решка»;

2) при бросании кубика число возможных исходов $n = 6$, может выпасть 1, 2, 3, 4, 5 или 6.
Пусть ровно m из этих n исходов приводят к наступлению некоторого события A, такие исходы называются *благоприятными*.
Классическое определение вероятности: $P(A) = m/n$.
Вероятность случайного события A — это отношение m/n, где n — число всех возможных исходов эксперимента, m — число исходов, благоприятных для события A.
Например:
1) пусть благоприятным исходом будет выпадение «орла» при бросании монеты, $m = 1$; вероятность выпадения «орла» при бросании монеты равна 1/2;
2) пусть благоприятным исходом будет выпадение тройки при бросании кубика, $m = 1$; вероятность выпадения тройки при бросании игрального кубика равна 1/6.
Классическое определение вероятности можно использовать только в случае с равновероятными исходами!

49. Монету бросают четыре раза. Найдите вероятность того, что «орёл» выпадет не более двух раз. Дайте ответ в процентах с точностью до целых.

Решение.

Число всех возможных исходов: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

16 возможных исходов:
ОООО, ОООР, ООРО, ОРОО, РООО, ООРР, ОРРО, РРОО, ОРОР, РООР, РОРО, ОРРР, РОРР, РРОР, РРРО, РРРР.
11 благоприятных исходов: ООРР, ОРРО, РРОО, ОРОР, РООР, РОРО, ОРРР, РОРР, РРОР, РРРО, РРРР.
Вероятность того, что «орёл» выпадет не более двух раз: 11/16 = 0,6875 ≈ 69%.
Ответ: 69%.

•
•
•

92. В лифт восьмиэтажного дома на первом этаже зашли 4 человека и поехали вверх. Найдите вероятность того, что они выйдут все на разных этажах. Дайте ответ в процентах с точностью до целых.

4. Геометрическое определение вероятности

Пусть A — случайная точка на отрезке длины L. Вероятность её попадания в любой отрезок длины d, принадлежащий данному отрезку длины L, равна:
P(A) = d/L.

Пусть A — случайная точка, принадлежащая плоской фигуре площади S. Вероятность её попадания в область этой фигуры площади s равна: P(A) = s/S.

93. На отрезке AD отмечены точки B и C. AC = 9 см, BD = 11 см, AD = 16 см. На отрезке AD случайным образом отмечается точка E. Какова вероятность того, что точка E попадёт на отрезок BC?

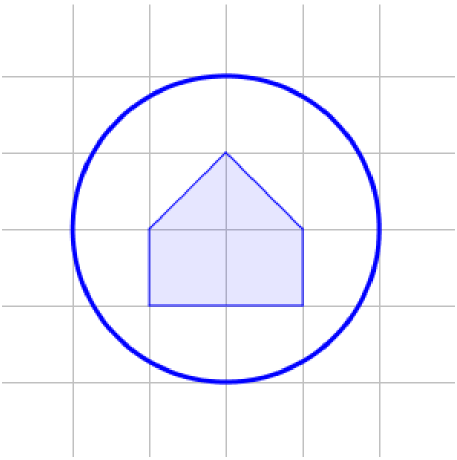
Решение.

AB = AD – BD = 16 – 11 = 5 (см).
BC = AC – AB = 9 – 5 = 4 (см).
Вероятность: 4/16 = 1/4.

Ответ: 1/4.

-
-
-

116. Внутри круга выделен и закрашен пятиугольник. Случайным образом внутри круга отмечается точка. Какова вероятность того, что она не попадёт в пятиугольник?



5. Задачи повышенной сложности

Объединением двух или нескольких событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из них в результате испытания.
Вероятность объединения двух несовместных событий равна сумме их вероятностей: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
Вероятность объединения двух совместных событий равна сумме их вероятностей минус вероятность их пересечения: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Пересечением двух или нескольких событий называется событие, состоящее в совместном наступлении всех этих событий в результате испытания.
Вероятность пересечения двух независимых событий равна произведению их вероятностей: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
Вероятность пересечения двух зависимых событий:
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$.
$P(B|A)$ — условная вероятность появления события B, если события A произошло.
$P(A|B)$ — условная вероятность появления события A, если события B произошло.

Размещения без повторений из *n* элементов по *k* в каждой (*k≤n, k>0*) — это комбинации, отличающиеся одна от другой составом или порядком расположения элементов.

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ \dots\ (n-k+1)$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Перестановки без повторений из *n* элементов — это размещения из *n* элементов по *n*; это комбинации из *n* элементов, отличающиеся друг от друга только порядком следования элементов.

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{1} = n!$$

Сочетания без повторений из *n* элементов по *k* элементов — это комбинации из *n* элементов по *k* (*k≤n*), отличающиеся друг от друга только составом элементов.

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$$

117. В мешке 6 белых шаров и 4 чёрных. Из мешка наугад вынимают один шар. Шар в мешок не возвращают. Затем из мешка вынимают ещё один шар. Какова вероятность того, что оба раза будут вынуты чёрные шары?

Решение.

1 способ.
Вероятность того, что первый раз вынут чёрный шар:
$4/(6 + 4) = 2/5$.
Вероятность того, что второй раз вынут чёрный шар:
$(4 - 1)/((6 + 4) - 1) = 1/3$.
Вероятность того, что оба раза будут вынуты чёрные шары: $2/5 \cdot 1/3 = 2/15$.

2 способ.
Число сочетаний из 4 по 2 разделить на число сочетаний из (6 + 4) по 2:
$(4 \cdot 3)/(1 \cdot 2) : (10 \cdot 9)/(1 \cdot 2) = 6/45 = 2/15$.
Ответ: 2/15.

-
-
-

160. Из колоды в 36 карт наугад вынуты две карты. Какова вероятность того, что среди них хотя бы одна карта — туз?

Решения и ответы

5. 4.
На гранях кубика: 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Событие 4 (выпадение двух чисел, кратных семи) — невозможное событие.

6. 3.
На гранях кубика: 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Событие 3 (выпадение пятёрки и нуля) — невозможное событие.

7. 3.
На гранях кубика: 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Сумма трёх выпавших чисел от 3 до 18 включительно.
Событие 3 (сумма трёх выпавших чисел не меньше, чем 3) — достоверное событие.

8. 2.
На гранях кубика: 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Сумма трёх выпавших чисел от 3 до 18 включительно.
Событие 2 (сумма трёх выпавших чисел не больше, чем 18) — достоверное событие.

-
-
-

160. 67/315.
Число всех возможных исходов — число сочетаний из 36 по 2: (36 · 35)/(1 · 2) = 630.
В колоде 4 туза.
Число всех возможных пар без тузов — число сочетаний из (36 – 4) по 2: (32 · 31)/(1 · 2) = 496.
Число благоприятных исходов (хотя бы одна карта — туз): 630 – 496 = 134.
Вероятность того, что среди них хотя бы одна карта — туз: 134/630 = 67/315.

МетаШкола

ISBN 978-5-6051167-3-8

9 785605 116738 >