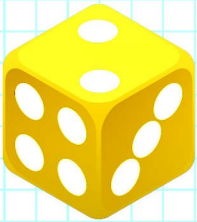
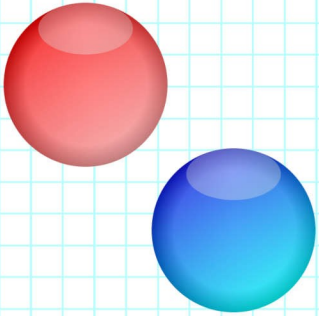
Е. В. Смыкалова

МАТЕМАТИКА

ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ









7

Е. В. Смыкалова

Математика
Задачи
по теории вероятностей

7 класс

Демоверсия

Санкт-Петербург
СМИ МетаШкола
2024

УДК 373.51
ББК 20.я72

Смыкалова Елена Владимировна

С52 Математика. Задачи по теории вероятностей.
7 класс: Сборник задач / Е. В. Смыкалова. – СПб.: СМИ МетаШкола, 2024. – 98 с. – ISBN 978-5-6051167-3-8

Сборник содержит 160 задач по теории вероятностей для 7 класса: задачи на случайные события; задачи на статистическое, классическое и геометрическое определение вероятности. Рассматриваются различные способы решения задач. Приводятся образцы оформления для первых четырёх задач каждой главы. Ко всем задачам есть ответы и подробные решения в конце книги. Книга будет интересна и полезна ученикам 7 класса, их родителям и учителям математики.

ISBN 978-5-6051167-3-8

© Смыкалова Е. В., 2024
© СМИ МетаШкола, 2024

Все права защищены.
Эта книга, целиком или частично, не может быть использована или размещена где-либо в любой форме и с использованием любых технических средств без письменного разрешения владельца авторских прав. Нарушение прав преследуется по закону.

www.metaschool.ru

Оглавление

Предисловие.....5

1. Случайные события.....6

2. Статистическое определение вероятности.....10

3. Классическое определение вероятности.....13

4. Геометрическое определение вероятности.....17

5. Задачи повышенной сложности.....19

Решения и ответы.....22

Предисловие

Сборник содержит 160 задач по теории вероятностей для 7 класса. В первой главе — задачи на случайные события; во второй главе — задачи на статистическое определение вероятности; в третьей — задачи на классическое определение вероятности; в четвёртой — задачи на геометрическое определение вероятности; в пятой — задачи повышенной сложности.

Рассматриваются различные способы решения задач. Приводятся образцы оформления для первых четырёх задач каждой главы. Ко всем задачам есть ответы и подробные решения в конце книги. Книга будет интересна и полезна ученикам 7 класса, их родителям и учителям математики.

Это четвёртая книга серии «Задачи по теории вероятностей» для 4–9 классов.
Материал книги был апробирован на уроках математики, на занятиях математического кружка
в Физико-математическом лицее № 366 Санкт-Петербурга и в интернет-кружке МетаШколы www.metaschool.ru.

Желаем успехов в изучении математики!

1. Случайные события

Кубик игральный в теории вероятностей имеет шесть граней правильной формы. На каждой грани выбито точками число, и при бросании кубика выпадает одно из шести чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Сумма чисел на противоположных гранях равна 7.



Случайные события — это события, которые при одних и тех же условиях могут произойти, а могут и не произойти. Например: выпадение пятёрки при бросании кубика.
Невозможные события — в данных условиях произойти не могут. Например: выпадение семёрки при бросании кубика.

Достоверные события — в данных условиях произойдут обязательно. Например: выпадение числа меньше семи при бросании кубика.
Одни случайные события более вероятные — ближе к достоверным, а другие менее вероятные — ближе к невозможным.
Противоположные события — пара событий A и B таких, что если происходит событие A, то событие B не происходит и наоборот, одновременно они произойти не могут, одно из двух событий обязательно происходит.
Примеры противоположных событий:
1) при бросании монеты — выпадение «орла», выпадение «решки»;
2) при бросании кубика — выпадение нечётного числа, выпадение чётного числа.
Несовместные события — не могут произойти одновременно ни при одном исходе эксперимента, появление одного из них исключает появление другого события.
Примеры несовместных событий:
1) наугад из набора домино вынимают одну фишку — вынут дубль, вынут не дубль;
2) наугад из колоды карт вынимают одну карту — вынут король, вынут валет.
Независимые события — вероятность каждого из них не зависит от наступления или не наступления другого

события, наступление одного из них не изменяет вероятность наступления другого.
Примеры независимых событий:
1) при двух бросках кубика — в первый раз выпало чётное число; во второй раз выпала пятёрка;
2) наугад из колоды карт вынимают одну карту — вынут туз, вынута карта пиковой масти.

1. Бросают два кубика. Какое из событий достоверное:
1) сумма двух выпавших чисел больше, чем 2;
2) сумма двух выпавших чисел меньше, чем 12;
3) сумма двух выпавших чисел не больше, чем 12;
4) сумма двух выпавших чисел чётное число?

Решение.

На гранях кубика: 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Сумма двух выпавших чисел от 2 до 12 включительно.
Событие 3 (сумма двух выпавших чисел не больше, чем 12) — достоверное событие.
Ответ: 3.

-
-
-

24. Случайным образом выбирается трёхзначное число.

Какое из событий наиболее вероятно:
1) число нечётное и меньше, чем 500;
2) число чётное и не меньше, чем 500;
3) первая цифра числа 2 или 4, а последняя цифра — нечётная;
4) первая цифра числа чётная, а последняя цифра — 1, 3 или 5?

2. Статистическое определение вероятности

Монета в теории вероятностей имеет только две стороны, одна из которых «орёл», другая — «решка». Монету бросают, и она падает одной из сторон вверх.



Чтобы выяснить, насколько вероятно то или иное случайное событие, связанное с экспериментом, нужно подсчитать, как часто оно происходит. При этом рассматривают две величины:

- *абсолютная частота* показывает, сколько раз в серии экспериментов наблюдалось данное событие;
- *относительная частота* показывает, какая доля экспериментов завершилась наступлением данного события.

Относительная частота определяется делением

абсолютной частоты на число экспериментов: n/N.
Например: при бросании монеты «орёл» выпал 11 раз из 20; абсолютная частота равна 11, а относительная частота равна 11/20 = 0,55 = 55%.
Статистическое определение вероятности:
за вероятность случайного события принимается его относительная частота, полученная в серии экспериментов: P=n/N.

- Для невозможного события n=0, относительная частота равна 0, вероятность события равна 0, это событие не произойдет.
- Для достоверного события n=N, относительная частота равна 1, событие обязательно произойдет.
- Для случайного события 0≤n≤N, относительная частота от 0 до 1 включительно, вероятность события от 0 до 1 включительно.

Противоположные события — пара событий A и B таких, что если происходит событие A, то событие B не происходит и наоборот: P(A) + P(B) = 1; P(A) = 1 – P(B).
Вероятность объединения двух несовместных событий равна сумме их вероятностей: P(A ∪ B) = P(A) + P(B).
Вероятность пересечения двух независимых событий

равна произведению их вероятностей:
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

25. Проведён эксперимент по бросанию монеты. «Орёл» выпал 120 раз, а «решка» — 130 раз. Найдите относительную частоту выпадения «решки» в данном эксперименте.

Решение.

Монету подбрасывали: 120 + 130 = 250 раз.
Относительная частота выпадения «решки»:
130/250 = 13/25 = 0,52 = 52%.
Ответ: 52%.

-
-
-

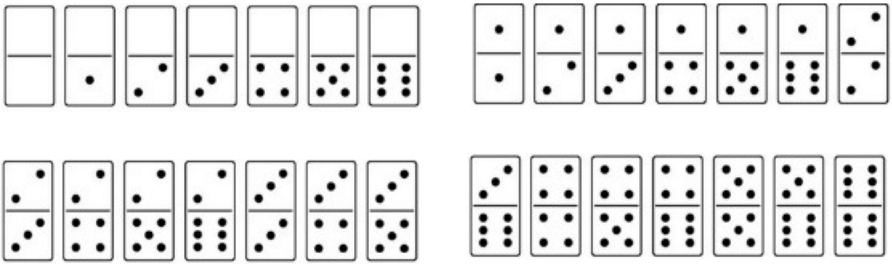
48. Вероятность остановки за смену одного станка, работающего в цехе, равна 0,1, а другого — 0,15. Какова вероятность того, что оба станка за смену не остановятся, если станки останавливаются независимо друг от друга?

3. Классическое определение вероятности

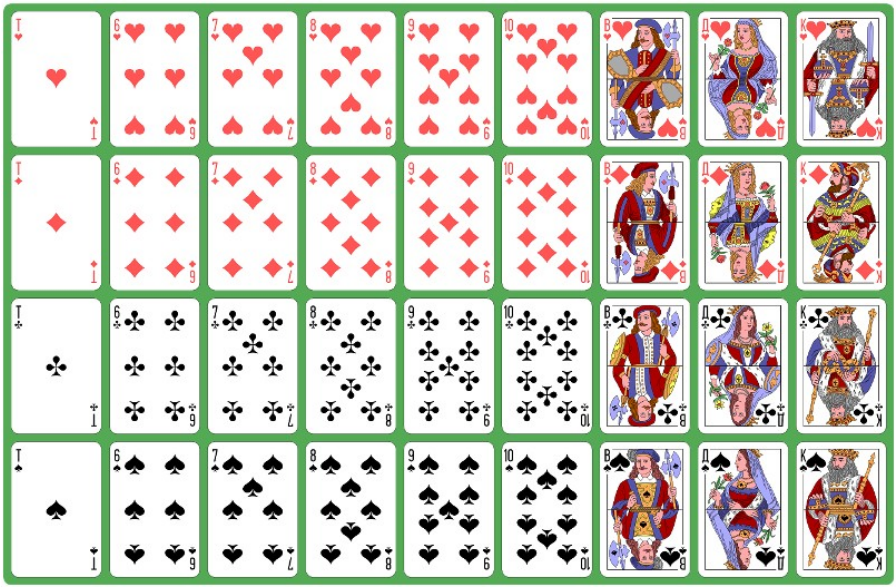
Монета в теории вероятностей имеет только две стороны. Выпадение «орла», выпадение «решки» — равновероятные события. Никакой другой вариант невозможен, монета не может потеряться или встать на ребро.

Кубик игральный в теории вероятностей имеет шесть граней правильной формы. Выпадение каждого из чисел (1, 2, 3, 4, 5, 6) — равновероятные события. Никакой другой вариант невозможен, кубик не может потеряться или встать на ребро.

Домино. В классическом наборе 28 прямоугольных фишек, которые разделены на две части. На каждой части точками отмечены числа от 0 до 6 включительно.



Карты игральные — это классическая игровая колода, которая включает в себя 36 карт, разделенных на 4 масти: бубны (♦), пики (♠), черви (♥) и трефы (♣). Каждая масть содержит карты от 6 до туза.



Рассмотрим случайный эксперимент, который может завершиться одним из n возможных исходов, причём все исходы *равновероятны*, нет никаких оснований считать один исход вероятнее другого.

Например:

1) при бросании монеты число возможных исходов n = 2, может выпасть «орёл» или «решка»;

2) при бросании кубика число возможных исходов n = 6,

может выпасть 1, 2, 3, 4, 5 или 6.
Пусть ровно m из этих n исходов приводят к наступлению некоторого события A, такие исходы называются *благоприятными*.
Классическое определение вероятности: *P(A) = m/n.*
Вероятность случайного события A — это отношение m/n, где n — число всех возможных исходов эксперимента, m — число исходов, благоприятных для события A.
Например:
1) пусть благоприятным исходом будет выпадение «орла» при бросании монеты, m = 1; n = 2; вероятность выпадения «орла» при бросании монеты равна 1/2;
2) пусть благоприятным исходом будет выпадение тройки при бросании кубика, m = 1; n = 6; вероятность выпадения тройки при бросании игрального кубика равна 1/6.
Классическое определение вероятности можно использовать только в случае с равновероятными исходами!

49. Монету бросают четыре раза. Найдите вероятность того, что «орёл» выпадет не более двух раз. Дайте ответ в процентах с точностью до целых.

Решение.

Число всех возможных исходов: 2 · 2 · 2 · 2 = 16.
16 возможных исходов:

ОООО, ОООР, ООРО, ОРОО, РООО, ООРР, ОРРО, РРОО, ОРОР, РООР, РОРО, ОРРР, РОРР, РРОР, РРРО, РРРР.
11 благоприятных исходов: ООРР, ОРРО, РРОО, ОРОР, РООР, РОРО, ОРРР, РОРР, РРОР, РРРО, РРРР.
Вероятность того, что «орёл» выпадет не более двух раз: 11/16 = 0,6875 ≈ 69%.
Ответ: 69%.

-
-
-

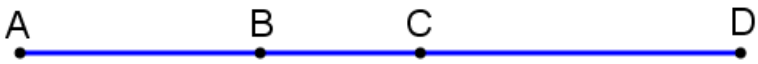
92. В лифт восьмиэтажного дома на первом этаже зашли 4 человека и поехали вверх. Каждый независимо и с одинаковой вероятностью выходит на одном из этажей 2–8. Найдите вероятность того, что они выйдут все на разных этажах. Дайте ответ в процентах с точностью до целых.

4. Геометрическое определение вероятности

Пусть A — случайная точка на отрезке длины L. Вероятность её попадания в любой отрезок длины d, принадлежащий данному отрезку длины L, равна: P(A) = d/L.

Пусть A — случайная точка, принадлежащая плоской фигуре площади S. Вероятность её попадания в область этой фигуры площади s равна: P(A) = s/S.

93. На отрезке AD отмечены точки B и C. AC = 9 см, BD = 11 см, AD = 16 см. На отрезке AD случайным образом отмечается точка E. Какова вероятность того, что точка E попадёт на отрезок BC?

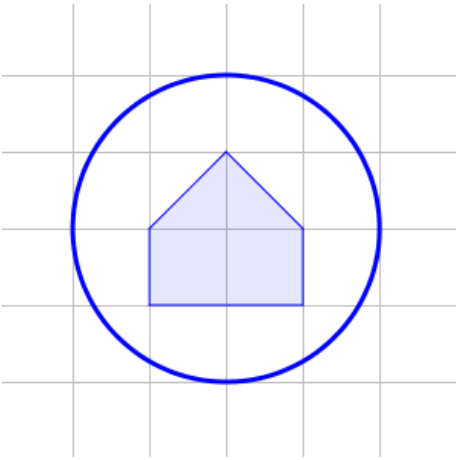


Решение.

AB = AD – BD = 16 – 11 = 5 (см).
BC = AC – AB = 9 – 5 = 4 (см).
Вероятность: 4/16 = 1/4.
Ответ: 1/4.

-
-
-

116. Внутри круга выделен и закрашен пятиугольник. Случайным образом внутри круга отмечается точка. Какова вероятность того, что она не попадёт в пятиугольник?



5. Задачи повышенной сложности

Объединением двух или нескольких событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из них в результате испытания.
Вероятность объединения двух несовместных событий равна сумме их вероятностей: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
Вероятность объединения двух совместных событий равна сумме их вероятностей минус вероятность их пересечения: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) – P(A \cap B)$.

Пересечением двух или нескольких событий называется событие, состоящее в совместном наступлении всех этих событий в результате испытания.
Вероятность пересечения двух независимых событий равна произведению их вероятностей:
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
Вероятность пересечения двух зависимых событий:
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$.
$P(B|A)$ — условная вероятность появления события B, если событие A произошло.
$P(A|B)$ — условная вероятность появления события A, если событие B произошло.

Размещения без повторений из *n* элементов по *k* в каждой (*k≤n, k>0*) — это комбинации, отличающиеся одна от другой составом или порядком расположения элементов.

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-k+1)$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Перестановки без повторений из *n* элементов — это размещения из *n* элементов по *n*; это комбинации из *n* элементов, отличающиеся друг от друга только порядком следования элементов.

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{1} = n!$$

Сочетания без повторений из *n* элементов по *k* элементов — это комбинации из *n* элементов по *k* (*k≤n*), отличающиеся друг от друга только составом элементов.

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

117. В мешке 6 белых шаров и 4 чёрных. Из мешка наугад вынимают один шар. Шар в мешок не возвращают. Затем из мешка вынимают ещё один шар. Какова вероятность того, что оба раза будут вынуты чёрные шары?

Решение.

1 способ.
Вероятность того, что первый раз вынут чёрный шар:
$4/(6 + 4) = 2/5$.
Вероятность того, что второй раз вынут чёрный шар:
$(4 – 1)/((6 + 4) – 1) = 1/3$.
Вероятность того, что оба раза будут вынуты чёрные шары: $2/5 \cdot 1/3 = 2/15$.

2 способ.
Число сочетаний из 4 по 2 разделить на число сочетаний из (6 + 4) по 2:
$(4 \cdot 3)/(1 \cdot 2) : (10 \cdot 9)/(1 \cdot 2) = 6/45 = 2/15$.
Ответ: 2/15.

-
-
-

160. Из колоды в 36 карт наугад вынуты две карты. Какова вероятность того, что среди них хотя бы одна карта — туз?

Решения и ответы

5. 4.
На гранях кубика: 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Событие 4 (выпадение двух чисел, кратных семи) — невозможное событие.

6. 3.
На гранях кубика: 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Событие 3 (выпадение пятёрки и нуля) — невозможное событие.

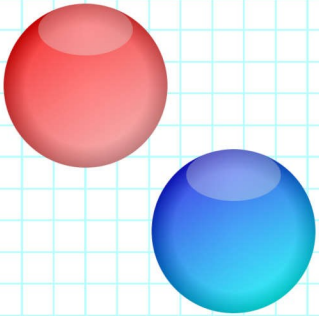
7. 3.
На гранях кубика: 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Сумма трёх выпавших чисел от 3 до 18 включительно.
Событие 3 (сумма трёх выпавших чисел не меньше, чем 3) — достоверное событие.

8. 2.
На гранях кубика: 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Сумма трёх выпавших чисел от 3 до 18 включительно.
Событие 2 (сумма трёх выпавших чисел не больше, чем 18) — достоверное событие.

-
-
-

160. 67/315.
Число всех возможных исходов — число сочетаний из 36 по 2: (36 · 35)/(1 · 2) = 630.
В колоде 4 туза.
Число всех возможных пар без тузов — число сочетаний из (36 – 4) по 2: (32 · 31)/(1 · 2) = 496.
Число благоприятных исходов (хотя бы одна карта — туз): 630 – 496 = 134.
Вероятность того, что среди них хотя бы одна карта — туз: 134/630 = 67/315.

МетаШкола



ISBN 978-5-6051167-3-8