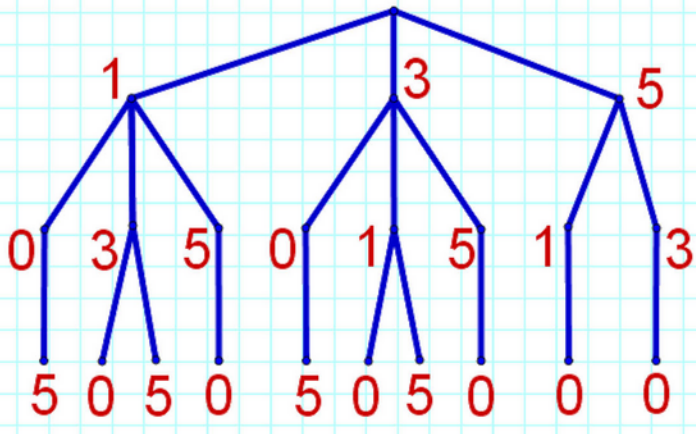
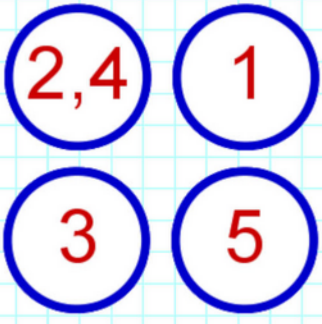
Е. В. Смыкалова

МАТЕМАТИКА

ЗАДАЧИ ПО КОМБИНАТОРИКЕ





9

Е. В. Смыкалова

Математика
Задачи по комбинаторике

9 класс

Санкт-Петербург
СМИ МетаШкола
2023

УДК 373.51
ББК 20.я72

Смыкалова Елена Владимировна

С52 Математика. Задачи по комбинаторике.
9 класс: Сборник задач / Е. В. Смыкалова. – СПб.: СМИ МетаШкола, 2023. – 89 с. – ISBN 978_5_6050452_8_1

Сборник содержит 150 задач по комбинаторике для 9 класса: задачи, которые решаются полным перебором и построением дерева вариантов; задачи на правила суммы и произведения; задачи на размещения, перестановки и сочетания. Рассматриваются различные способы решения задач. Приводятся образцы оформления для первых четырёх задач каждой главы. Ко всем задачам есть ответы и подробные решения в конце книги. Книга будет интересна и полезна ученикам 9 класса, их родителям и учителям математики.

ISBN 978_5_6050452_8_1
© Смыкалова Е. В., 2023
© СМИ МетаШкола, 2023

Все права защищены.
Эта книга, целиком или частично, не может быть использована или размещена где-либо в любой форме и с использованием любых технических средств без письменного разрешения владельца авторских прав. Нарушение прав преследуется по закону.

www.metaschool.ru

Оглавление

Предисловие

Сборник содержит 150 задач по комбинаторике для 9 класса. В первой главе — задачи, которые решаются полным перебором и построением дерева вариантов; во второй главе — задачи на правила суммы и произведения; в третьей — размещения; в четвёртой — перестановки; в пятой — сочетания; в шестой — задачи повышенной сложности.

Рассматриваются различные способы решения задач. Приводятся образцы оформления для первых четырёх задач каждой главы. Ко всем задачам есть ответы и подробные решения в конце книги. Книга будет интересна и полезна ученикам 9 класса, их родителям и учителям математики.

Это шестая книга серии «Задачи по комбинаторике» 4 – 9 классы.
Материал книги был апробирован на уроках математики, на занятиях математического кружка в Физико-математическом лицее № 366 Санкт-Петербурга и в интернет-кружке МетаШколы www.metaschool.ru.

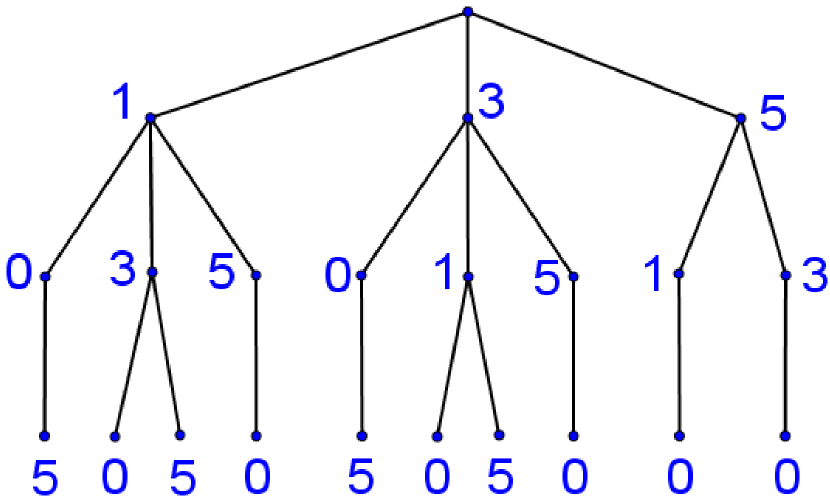
Желаем успехов в изучении математики!

1. Полный перебор, дерево вариантов

1. Сколько трёхзначных чисел, делящихся на 5, у которых все цифры разные, и которые записываются с помощью цифр 0, 1, 3, 5?

Решение.

Дерево возможных вариантов:



Применить признак делимости на 5:
последняя цифра — 0 или 5.

Если последняя цифра 0, то 6 чисел:
130, 150, 310, 350, 510, 530.
Если последняя цифра 5, то 4 числа:
105, 135, 305, 315.
Всего: 6 + 4 = 10 чисел.
Ответ: 10.

-
-
-

24. В куртке разных два кармана. Сколькими способами можно разложить три различные монеты по этим карманам?

2. Правила суммы и произведения

Правило суммы

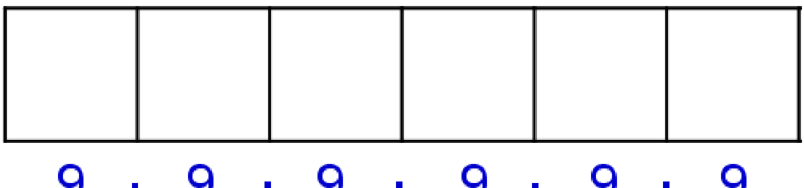
Если некоторый элемент А можно выбрать **m** способами, а элемент В можно выбрать **n** способами, то выбор "либо А, либо В" можно сделать **m+n** способами.

Правило произведения

Если элемент А можно выбрать **m** способами, а элемент В можно выбрать **n** способами, то пару А и В можно выбрать **m·n** способами.

25. Сколько различных шестизначных чисел, у которых каждые две соседние цифры разные?

Решение.



Первая цифра — любая из девяти (1, 2, 3, …, 9); девять вариантов; с нуля шестизначные числа не начинаются.

Вторая цифра — любая из девяти, может быть 0, но не такая, как первая цифра; девять вариантов.
Третья цифра — тоже девять вариантов, цифра не такая, как вторая и так далее.
По правилу произведения: $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 531441$.
Ответ: 531441.

-
-
-

50. Имеются 3 разные чашки, 6 разных блюдец и 9 разных ложек. Сколькими способами можно накрыть стол для троих, чтобы у каждого была чашка, блюдце и ложка?

3. Размещения

Комбинации из *n* элементов по *k* в каждой (*k≤n, k>0*), отличающиеся одна от другой либо составом, либо порядком расположения элементов, называются ***размещениями*** из *n* элементов по *k* элементов.

Число размещений без повторений из *n* элементов по *k* находится как произведение последовательно уменьшающихся на единицу сомножителей, первый из которых равен *n*. Число всех сомножителей равно *k*.

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-k+1)$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Например, число размещений без повторений из 5 по 3:

$$A_5^3 = 5(5-1)(5-2) = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$$

$$0! = 1$$
$$1! = 1$$
$$2! = 1 \cdot 2$$
$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$$
$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$$
$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$$

$$A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Число размещений с повторениями из *n* элементов по *k* находится по формуле:

$$\bar{A}_n^k = n^k$$

Например, число размещений с повторениями из 2 по 5:

$$\bar{A}_2^5 = 2^5 = 32$$

51. В 9 классе изучаются 13 предметов. Сколькими способами можно составить расписание уроков на понедельник, если в этот день должно быть 5 различных уроков?

Решение.

$$A_{13}^{5} = \frac{13!}{(13-5)!} = 154440$$

Размещения без повторений из 13 по 5:
13 · 12 · 11 · 10 · 9 = 154440 способов.
Ответ: 154440.

-
-
-

70. Имеется шесть разных коробок. Сколькими способами можно разложить девять занумерованных шаров по этим коробкам?

4. Перестановки

Перестановки без повторений из *n* элементов — это размещения из *n* элементов по *n*; это комбинации из *n* элементов, отличающиеся друг от друга только порядком следования элементов.

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{1} = n!$$

Например, число перестановок без повторений из 5:

$$P_5 = A_5^5 = \frac{5!}{(5-5)!} = \frac{5!}{1} = 5! = 120$$

Число перестановок с повторениями из *n* элементов, из которых *k* — одинаковые находится по формуле:

$$\bar{P}_n(k) = \frac{n!}{k!}$$

Если несколько повторений, то число перестановок с повторениями из n элементов, из которых $k_1, k_2, \ldots, k_m$ — одинаковые находится по формуле:

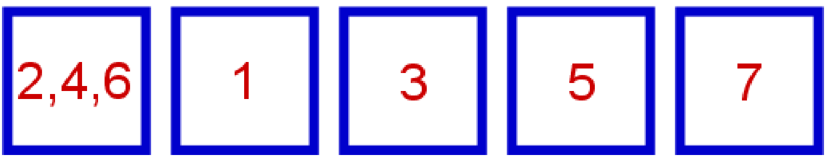
$$\bar{P}_n(k_1; k_2; k_3; \ldots) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdot \ldots}$$

Например, число перестановок с повторениями из 8, из которых 5 одинаковых элементов и 3 других одинаковых:

$$\bar{P}_8(5; 3) = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = 56$$

71. Сколько различных семизначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 так, чтобы чётные цифры были рядом? Цифры в записи числа не должны повторяться.

Решение.



Объединить чётные цифры 2, 4, 6 в один элемент.

Шесть вариантов перестановок из трёх элементов: 3! = 6.
Всего элементов: 7 – 3 + 1 = 5.
Перестановки из пяти элементов: 5! = 120.

$$P_3 \cdot P_5 = 3! \cdot 5! = 720$$

Всего: 6 · 120 = 720 чисел.
Ответ: 720.

-
-
-

90. Сколько различных «слов» можно составить, переставляя буквы в слове ПАРАЛЛЕЛОГРАММ?

5. Сочетания

Сочетания без повторений из *n* элементов по *k* элементов — это комбинации из *n* элементов по *k* (*k*≤*n*), отличающиеся друг от друга только составом элементов.

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

Например, число сочетаний без повторений из 5 по 3:

$$C_5^3 = \frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!} = 10$$

Число сочетаний с повторениями из *m* элементов по *n* определяется по формуле:

$$\bar{C}_m^n = C_{m+n-1}^n$$

Например, число сочетаний с повторениями из 2 по 5:

$$\bar{C}_2^5 = C_{2+5-1}^5 = C_6^5 = 6$$

91. Сколькими способами можно разбить группу из 15 человек на две группы — 5 человек и 10 человек?

Решение.

$$C_{15}^5 = \frac{15!}{(15-5)! \cdot 5!} = 3003$$

$$C_{15}^5 = C_{15}^{15-5} = 3003$$

Выбрать 5 человек в первую группу — сочетания
из 15 по 5, оставшиеся 10 человек во вторую группу.
Сочетания без повторений из 15 по 5:
(15 · 14 · 13 · 12 · 11) : (1 · 2 · 3 · 4 · 5) = 3003 способа.
Ответ: 3003.

-
-
-

126. Из колоды, содержащей 52 карты, взяли 8 карт. В скольких случаях среди этих 8 карт окажется ровно 3 туза?

6. Задачи повышенной сложности

127. Сколько различных трёхзначных чисел, у которых произведение цифр меньше трёх?

Решение.

1) Наборы цифр из 1 и 2 без нуля, двоек не больше одной; три варианта с двойкой: 211, 121, 112.
2) Один набор без нуля и без двойки: 111.
3) Наборы цифр с одним нулем:
а) $9 \cdot 1 \cdot 9 = 81$;
первая и последняя цифры любые из 9, от 1 до 9 включительно, а вторая цифра 0;
б) $9 \cdot 9 \cdot 1 = 81$;
первая и вторая цифры любые из 9, от 1 до 9 включительно, а последняя цифра 0.
4) Наборы цифр с двумя нулями — девять вариантов: 100, 200, ..., 900.
По правилу суммы: $3 + 1 + 81 + 81 + 9 = 175$.
Ответ: 175.

-
-
-

150. В классе 12 девочек и 10 мальчиков. Для участия в конкурсе от класса надо сформировать команду из пяти человек так, чтобы мальчиков в команде было не более трёх. Сколькими способами это можно сделать?

Решения и ответы

5. 4.
Сумма цифр равна 4:
0 + 0 + 4; 0 + 1 + 3, 0 + 2 + 2, 1 + 1 + 2.
Нечётные числа оканчиваются на нечётную цифру (1, 3, 5, 7, 9).
4 нечётных числа, сумма цифр которых равна 4:
103, 301, 121, 211.

6. 9.
Сумма цифр равна 5:
0 + 0 + 5; 0 + 1 + 4; 0 + 2 + 3; 1 + 2 + 2; 1 + 1 + 3.
Чётные числа оканчиваются на чётную цифру (0, 2, 4, 6, 8).
9 чётных чисел, сумма цифр которых равна 5:
500, 410, 320, 230, 140, 302, 212, 122, 104.

7. 8.
Первые две цифры — 13 или 31; два варианта.
Третья цифра числа — любая из четырёх (2, 4, 6, 8).
8 чисел: 132, 134, 136, 138, 312, 314, 316, 318.

-
-
-

150. 23562.

1) В команде только девочки — сочетания из 12 по 5:
(12 · 11 · 10 · 9 · 8) : (1 · 2 · 3 · 4 · 5) = 792.
2) В команде один мальчик, четыре девочки — сочетания из 10 по 1 умножить на сочетания из 12 по 4:
10 · ((12 · 11 · 10 · 9) : (1 · 2 · 3 · 4)) = 4950.
3) В команде два мальчика, три девочки — сочетания из 10 по 2 умножить на сочетания из 12 по 3:
((10 · 9) : (1 · 2)) · ((12 · 11 · 10) : (1 · 2 · 3)) = 9900.
4) В команде три мальчика, две девочки — сочетания из 10 по 3 умножить на сочетания из 12 по 2:
((10 · 9 · 8) : (1 · 2 · 3)) · ((12 · 11) : (1 · 2)) = 7920.
По правилу суммы: 792 + 4950 + 9900 + 7920 = 23562.

МетаШкола

2,4 1

3 5

ISBN 978-5-6050452-8-1

9 785605 045281 >