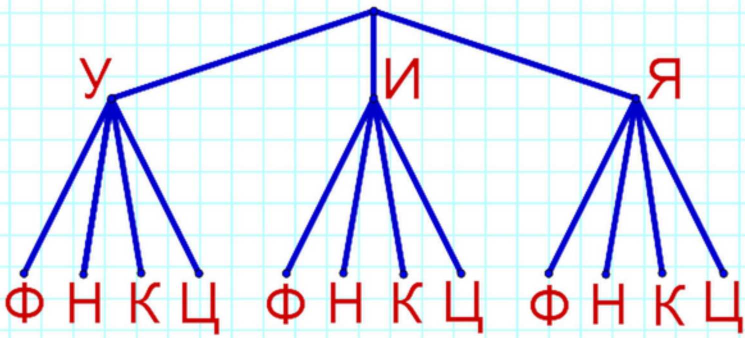
Е. В. Смыкалова

МАТЕМАТИКА

ЗАДАЧИ ПО КОМБИНАТОРИКЕ



Е. В. Смыкалова

Математика
Задачи по комбинаторике

8 класс

Демоверсия

Санкт-Петербург
СМИ МетаШкола
2023

УДК 373.51
ББК 20.я72

Смыкалова Елена Владимировна

С52 Математика. Задачи по комбинаторике.
8 класс: Сборник задач / Е. В. Смыкалова. – СПб.: СМИ МетаШкола, 2023. – 90 с. – ISBN 978_5_6050452_7_4

Сборник содержит 150 задач по комбинаторике для 8 класса: задачи, которые решаются полным перебором и построением дерева вариантов; задачи на правила суммы и произведения; задачи на размещения, перестановки и сочетания. Рассматриваются различные способы решения задач. Приводятся образцы оформления для первых четырёх задач каждой главы. Ко всем задачам есть ответы и подробные решения в конце книги. Книга будет интересна и полезна ученикам 8 класса, их родителям и учителям математики.

ISBN 978_5_6050452_7_4

www.metaschool.ru

Оглавление

Предисловие

Сборник содержит 150 задач по комбинаторике для 8 класса. В первой главе — задачи, которые решаются полным перебором и построением дерева вариантов; во второй главе — задачи на правила суммы и произведения; в третьей — размещения; в четвёртой — перестановки; в пятой — сочетания; в шестой — задачи повышенной сложности.

Рассматриваются различные способы решения задач. Приводятся образцы оформления для первых четырёх задач каждой главы. Ко всем задачам есть ответы и подробные решения в конце книги. Книга будет интересна и полезна ученикам 8 класса, их родителям и учителям математики.

Это пятая книга серии «Задачи по комбинаторике» 4 – 9 классы.
Материал книги был апробирован на уроках математики, на занятиях математического кружка в Физико-математическом лицее № 366 Санкт-Петербурга и в интернет-кружке МетаШколы www.metaschool.ru.

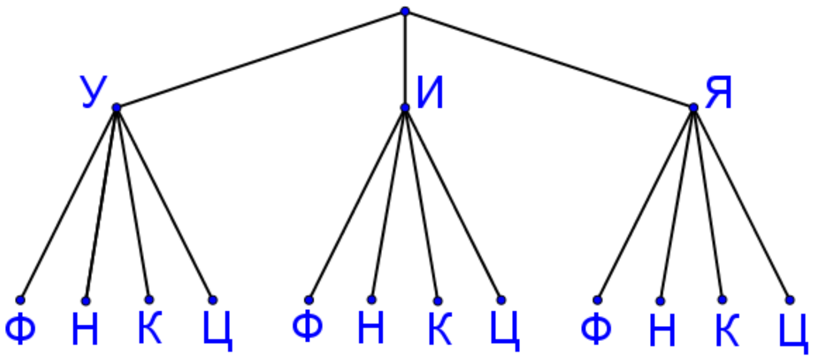
Желаем успехов в изучении математики!

1. Полный перебор, дерево вариантов

1. Сколько вариантов выбора двух букв (одна гласная и одна согласная) из слова ФУНКЦИЯ?

Решение.

Построим дерево возможных вариантов.



12 вариантов: УФ, УН, УК, УЦ, ИФ, ИН, ИК, ИЦ, ЯФ, ЯН, ЯК, ЯЦ.
Ответ: 12.

-
-
-

20. Сколько различных комбинаций из букв, в которых все гласные стоят рядом, и которые начинаются с буквы А, можно составить, переставляя буквы слова РАДИУС?

2. Правила суммы и произведения

Правило суммы

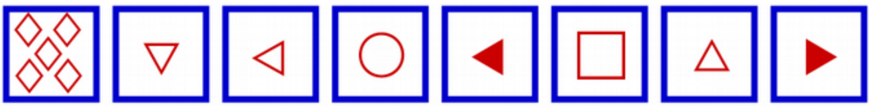
Если некоторый элемент А можно выбрать **m** способами, а элемент В можно выбрать **n** способами, то выбор "либо А, либо В" можно сделать **m+n** способами.

Правило произведения

Если элемент А можно выбрать **m** способами, а элемент В можно выбрать **n** способами, то пару А и В можно выбрать **m·n** способами.

21. Имеется 12 книг, пять из них одинаковые, а остальные — отличные от этих пяти и различны между собой. Сколькими способами можно расставить эти книги на полке при условии, что одинаковые книги должны стоять рядом?

Решение.



Рассматривать пять одинаковых книг, как одну книгу. Тогда всего элементов будет: 12 – 5 + 1 = 8.

По правилу произведения:
$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$ способов.
Ответ: 40320.

•
•
•

50. Сколько семизначных чисел, которые записываются чётными цифрами, и у которых каждые две соседние цифры разные?

3. Размещения

Комбинации из *n* элементов по *k* в каждой (*k≤n, k>0*), отличающиеся одна от другой либо составом, либо порядком расположения элементов, называются ***размещениями*** из *n* элементов по *k* элементов.
Число размещений без повторений из *n* элементов по *k* находится как произведение последовательно уменьшающихся на единицу сомножителей, первый из которых равен *n*. Число всех сомножителей равно *k*.

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-k+1)$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Например, число размещений без повторений из 5 по 3:

$$A_5^3 = 5(5-1)(5-2) = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$$

$$0! = 1$$
$$1! = 1$$
$$2! = 1 \cdot 2$$
$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$$
$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$$
$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$$

$$A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Число размещений с повторениями из *n* элементов по *k* находится по формуле:

$$\bar{A}_n^k = n^k$$

Например, число размещений с повторениями из 2 по 5:

$$\bar{A}_2^5 = 2^5 = 32$$

51. Сколькими способами могут быть распределены первая, вторая и третья премии между 20 участниками конкурса?

Решение.

$$A_{20}^{3} = \frac{20!}{(20-3)!} = 6840$$

Размещения без повторений из 20 по 3:
20 · 19 · 18 = 6840 способов.
Ответ: 6840.

-
-
-

70. Из 4 разных чашек, 5 разных блюдец и 6 разных ложек надо накрыть стол для 4 человек. Каждому надо дать 1 чашку, 1 блюдце и 1 ложку. Сколькими способами это можно сделать?

4. Перестановки

Перестановки без повторений из *n* элементов — это размещения из *n* элементов по *n*; это комбинации из *n* элементов, отличающиеся друг от друга только порядком следования элементов.

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{1} = n!$$

Например, число перестановок без повторений из 5:

$$P_5 = A_5^5 = \frac{5!}{(5-5)!} = \frac{5!}{1} = 5! = 120$$

Число перестановок с повторениями из *n* элементов, из которых *k* — одинаковые находится по формуле:

$$\bar{P}_n(k) = \frac{n!}{k!}$$

Если несколько повторений, то число перестановок с повторениями из n элементов, из которых $k_1, k_2, \ldots, k_m$ —

одинаковые находится по формуле:

$$\bar{P}_n(k_1; k_2; k_3; \ldots) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdot \ldots}$$

Например, число перестановок с повторениями из 8, из которых 5 одинаковых элементов и 3 других одинаковых:

$$\bar{P}_8(5;3) = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = 56$$

71. Сколькими способами 5 девочек и 6 мальчиков могут занять в театре места в одном ряду с 1 по 11 так, чтобы девочки сидели на чётных местах, а мальчики на нечётных?

Решение.

М	Д	М	Д	М	Д	М	Д	М	Д	М

$$P_5 \cdot P_6 = 5! \cdot 6! = 86400$$

Сначала рассадить 5 девочек на 5 чётных мест (2, 4, 6, 8, 10): 5! = 120 способов.

Затем рассадить 6 мальчиков на 6 нечётных мест
(1, 3, 5, 7, 9, 11): $6! = 720$ способов.
По правилу произведения: $120 \cdot 720 = 86400$ способов.
Ответ: 86400.

-
-
-

90. Сколько можно сделать перестановок из n элементов, в которых данные три элемента A, B и C не стоят рядом?

5. Сочетания

Сочетания без повторений из *n* элементов по *k* элементов — это комбинации из *n* элементов по *k* ($k \le n$), отличающиеся друг от друга только составом элементов.

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

Например, число сочетаний без повторений из 5 по 3:

$$C_5^3 = \frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!} = 10$$

Число сочетаний с повторениями из *m* элементов по *n* определяется по формуле:

$$\bar{C}_m^n = C_{m+n-1}^n$$

Например, число сочетаний с повторениями из 2 по 5:

$$\bar{C}_2^5 = C_{2+5-1}^5 = C_6^5 = 6$$

91. В полуфинале по шахматам 20 шахматистов, а в финал попадут только трое. Сколькими способами может образоваться финальная тройка?

Решение.

$$C_{20}^3 = \frac{20!}{(20-3)! \cdot 3!} = 1140$$

Сочетания без повторений из 20 по 3:
(20 · 19 · 18) : (1 · 2 · 3) = 1140 способов.
Ответ: 1140.

-
-
-

120. У Вани 6 разных книг по математике, а у Пети 8 разных книг по математике. Сколькими способами они могут обменять три книги одного на три книги другого?

6. Задачи повышенной сложности

121. Сколько различных чисел, делящихся на 4, можно составить из цифр 0, 1, 3, 4, 5, если каждая цифра в числе используется не более одного раза?

Решение.

Применить признак делимости на 4: две последние цифры числа образуют двузначное число, делящееся на 4.
Однозначные числа: 0, 4. Два варианта.
Двузначное число: 40. Один вариант.
Трёхзначные числа:
первая цифра 1, 3 или 5 (три варианта), две последние цифры 04 или 40 (два варианта).
По правилу произведения: $3 \cdot 2 = 6$ вариантов.
Четырёхзначные числа:
первая цифра 1, 3 или 5 (три варианта), вторая цифра — не такая, как первая и две последние, две последние цифры 04 или 40 (два варианта).
По правилу произведения: $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ вариантов.
Пятизначные числа:
первая цифра 1, 3 или 5 (три варианта); вторая цифра — не такая, как первая и две последние; третья — не такая, как первая, вторая и две последние; две последние цифры

04 или 40 (два варианта).
По правилу произведения: $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 12$ вариантов.
Всего: $2 + 1 + 6 + 12 + 12 = 33$ числа.
Ответ: 33.

-
-
-

150. В шахматном кружке занимаются 3 девочки и 8 мальчиков. Для участия в соревнованиях надо составить команду из пяти человек, в которую обязательно должна входить хотя бы одна девочка. Сколькими способами это можно сделать?

Решения и ответы

5. 2.
6 чисел, сумма цифр которых равна 3:
111, 102, 120, 201, 210, 300.
Нечётные числа оканчиваются на нечётную цифру (1, 3, 5, 7, 9).
2 нечётных числа, сумма цифр которых равна 3: 111, 201.

6. 5.
7 чисел, сумма цифр которых равна 4:
103, 130, 301, 310, 202, 220, 400.
Чётные числа оканчиваются на чётную цифру (0, 2, 4, 6, 8).
5 чётных чисел, сумма цифр которых равна 4:
130, 310, 202, 220, 400.

7. 24.
Применить признак делимости на 3: сумма цифр числа должна делиться на 3.
Сумма цифр числа делится на 3:
1 + 2 + 3; 1 + 3 + 5; 2 + 3 + 4; 3 + 4 + 5.
24 числа:
123, 132, 213, 231, 312, 321;
135, 153, 315, 351, 513, 531;
234, 243, 324, 342, 423, 432;

345, 354, 435, 453, 534, 543.

-
-
-

150. 406.
В команду входит или одна девочка, или две, или три.
Если в команде одна девочка:
сочетания без повторений из 3 по 1 умножить на сочетания без повторений из 8 по 4, получаем 210.
Если в команде две девочки:
сочетания без повторений из 3 по 2 умножить на сочетания без повторений из 8 по 3, получаем 168.
Если в команде три девочки:
сочетания без повторений из 3 по 3 умножить на сочетания без повторений из 8 по 2, получаем 28.
По правилу суммы: 210 + 168 + 28 = 406 способов.

МетаШкола

АГ Б

И Л

ISBN 978-5-6050452-7-4

9 785605 045274 >