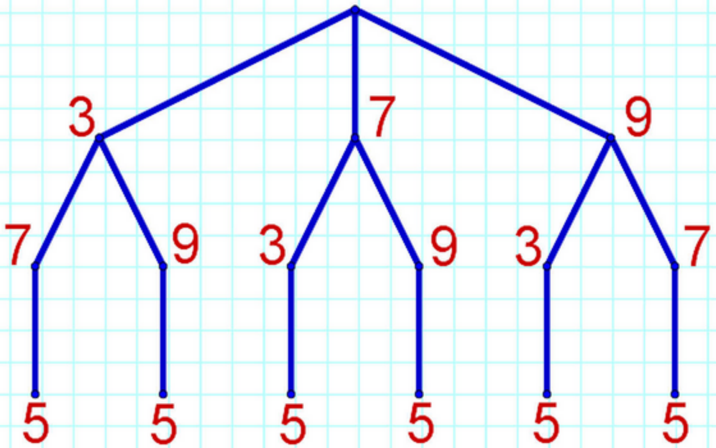
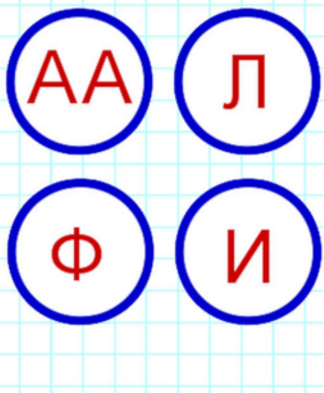
Е. В. Смыкалова

МАТЕМАТИКА

ЗАДАЧИ ПО КОМБИНАТОРИКЕ





7

Е. В. Смыкалова

Математика
Задачи по комбинаторике

7 класс

Демоверсия

Санкт-Петербург
СМИ МетаШкола
2023

УДК 373.51
ББК 20.я72

Смыкалова Елена Владимировна

С52 Математика. Задачи по комбинаторике.
7 класс: Сборник задач / Е. В. Смыкалова. – СПб.: СМИ МетаШкола, 2023. – 83 с. – ISBN 978-5-6050452-6-7

Сборник содержит 150 задач по комбинаторике для 7 класса: задачи, которые решаются полным перебором и построением дерева вариантов; задачи на правила суммы и произведения; задачи на размещения, перестановки и сочетания. Рассматриваются различные способы решения задач. Приводятся образцы оформления для первых четырёх задач каждой главы. Ко всем задачам есть ответы и подробные решения в конце книги. Книга будет интересна и полезна ученикам 7 класса, их родителям и учителям математики.

ISBN 978-5-6050452-6-7

www.metaschool.ru

Оглавление

Предисловие

Сборник содержит 150 задач по комбинаторике для 7 класса. В первой главе — задачи, которые решаются полным перебором и построением дерева вариантов; во второй главе — задачи на правила суммы и произведения; в третьей — размещения; в четвёртой — перестановки; в пятой — сочетания; в шестой — задачи повышенной сложности.

Рассматриваются различные способы решения задач. Приводятся образцы оформления для первых четырёх задач каждой главы. Ко всем задачам есть ответы и подробные решения в конце книги. Книга будет интересна и полезна ученикам 7 класса, их родителям и учителям математики.

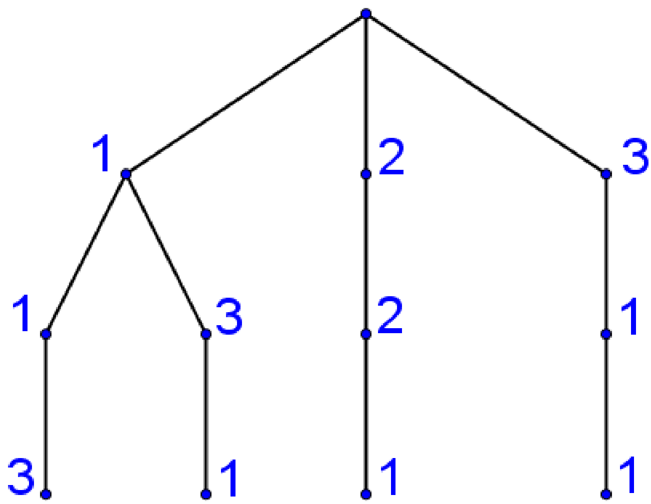
Это четвёртая книга серии «Задачи по комбинаторике» 4 – 9 классы.
Материал книги был апробирован на уроках математики, на занятиях математического кружка в Физико-математическом лицее № 366 Санкт-Петербурга и в интернет-кружке МетаШколы www.metaschool.ru.

Желаем успехов в изучении математики!

1. Полный перебор, дерево вариантов

1. Из цифр 1, 2, 3 составили различные трёхзначные числа. Сколько среди них нечётных чисел, сумма цифр которых равна 5?

Решение.



Сумма цифр равна 5: 1 + 2 + 2; 1 + 1 + 3.
Трёхзначные числа, сумма цифр которых равна 5:
122, 212, 221, 113, 131, 311.

Нечётные числа оканчиваются на нечётную цифру (1, 3, 5, 7, 9).
Четыре нечётных числа, сумма цифр которых равна 5: 221, 113, 131, 311.
Ответ: 4.

-
-
-

20. Сколько различных комбинаций из букв, в которых две гласные не стоят рядом, и которые начинаются с буквы Ф, можно составить, переставляя буквы слова ЦИФРА?

2. Правила суммы и произведения

Правило суммы

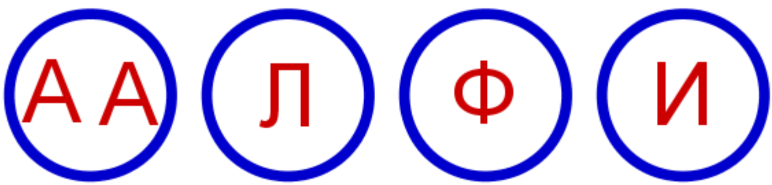
Если некоторый элемент A можно выбрать **m** способами, а элемент B можно выбрать **n** способами, то выбор "либо A, либо B" можно сделать **m+n** способами.

Правило произведения

Если элемент A можно выбрать **m** способами, а элемент B можно выбрать **n** способами, то пару A и B можно выбрать **m·n** способами.

21. В расписании уроков для 7 класса на понедельник должно быть два спаренных урока алгебры, кроме того, литература, физика и история. Сколько вариантов расписания можно составить на этот день?

Решение.



Рассматривать два спаренных урока, как один урок.

Тогда получается не 5, а 4 урока (один из них спаренный).
По правилу произведения: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ способа.
Ответ: 24.

-
-
-

50. Сколько различных семизначных чисел, у которых каждые две соседние цифры разные?

3. Размещения

Комбинации из *n* элементов по *k* в каждой ($k \leq n$, $k > 0$), отличающиеся одна от другой либо составом, либо порядком расположения элементов, называются ***размещениями*** из *n* элементов по *k* элементов.
Число размещений без повторений из *n* элементов по *k* находится как произведение последовательно уменьшающихся на единицу сомножителей, первый из которых равен *n*. Число всех сомножителей равно *k*.

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-k+1)$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Например, число размещений без повторений из 5 по 3:

$$A_5^3 = 5(5-1)(5-2) = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$$

$$
\begin{aligned}
0! &= 1\\
1! &= 1\\
2! &= 1\cdot 2\\
3! &= 1\cdot 2\cdot 3\\
4! &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\\
5! &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5
\end{aligned}
$$

$$A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Число размещений с повторениями из *n* элементов по *k* находится по формуле:

$$\bar{A}_n^k = n^k$$

Например, число размещений с повторениями из 2 по 5:

$$\bar{A}_2^5 = 2^5 = 32$$

51. Сколькими способами может разместиться семья из двух человек в четырёхместном купе, если других пассажиров в этом купе нет?

Решение.

Размещения без повторений: $4 \cdot 3 = 12$ способов.
Ответ: 12.

-
-
-

70. Сколькими способами можно составить семизначные телефонные номера из двоек, троек и четвёрок?

4. Перестановки

Перестановки без повторений из *n* элементов — это размещения из *n* элементов по *n*; это комбинации из *n* элементов, отличающиеся друг от друга только порядком следования элементов.

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{1} = n!$$

Например, число перестановок без повторений из 5:

$$P_5 = A_5^5 = \frac{5!}{(5-5)!} = \frac{5!}{1} = 5! = 120$$

Число перестановок с повторениями из *n* элементов, из которых *k* — одинаковые находится по формуле:

$$\bar{P}_n(k) = \frac{n!}{k!}$$

Если несколько повторений, то число перестановок с повторениями из n элементов, из которых $k_1, k_2, \ldots, k_m$ — одинаковые находится по формуле:

$$\bar{P}_n(k_1; k_2; k_3; \ldots) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdot \ldots}$$

Например, число перестановок с повторениями из 8, из которых 5 одинаковых элементов и 3 других одинаковых:

$$\bar{P}_8(5; 3) = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = 56$$

71. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, чтобы цифры в записи числа не повторялись?

Решение.

Первая цифра — одна из пяти (1, 2, 3, 4, 5).
Вторая цифра — любая из четырёх оставшихся.
Третья цифра — любая из трёх оставшихся.
Четвёртая цифра — любая из двух оставшихся.
Пятая цифра — та, что осталась.
По правилу произведения: 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 5! = 120.

Перестановки из 5 элементов или размещения из пяти элементов по пять.
Ответ: 120.

-
-
-

90. Сколько различных семизначных чисел можно составить, переставляя цифры 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3?

5. Сочетания

Сочетания без повторений из *n* элементов по *k* элементов — это комбинации из *n* элементов по *k* ($k \le n$), отличающиеся друг от друга только составом элементов.

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

Например, число сочетаний без повторений из 5 по 3:

$$C_5^3 = \frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!} = 10$$

Число сочетаний с повторениями из *m* элементов по *n* определяется по формуле:

$$\bar{C}_m^n = C_{m+n-1}^n$$

Например, число сочетаний с повторениями из 2 по 5:

$$\bar{C}_2^5 = C_{2+5-1}^5 = C_6^5 = 6$$

91. Сколькими способами можно назначить двух дежурных из пяти учеников класса?

Решение.

Порядок следования элементов не важен, важен только состав двойки выбранных элементов.
1) Полный перебор.
Пусть пять учеников — A, B, C, D, E.
10 способов: AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE.
2) Число размещений без повторений из 5 по 2 надо разделить на число перестановок из 2 элементов.
Сочетания без повторений из 5 по 2:
(5 · 4) : (1 · 2) = 10 способов.
Ответ: 10.

-
-
-

120. На почте продаются открытки трёх разных видов — с розами, с гвоздиками, с васильками. Сколькими

способами можно купить 6 открыток?

6. Задачи повышенной сложности

121. Сколько различных пятизначных чисел, у которых есть две одинаковые цифры?

Решение.

Всего пятизначных чисел: $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 90000$
(первая цифра — любая, кроме нуля, 9 вариантов, остальные цифры — любые из 10).
Пятизначных чисел, у которых все цифры разные:
$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27216$
(первая цифра — любая, кроме нуля, 9 вариантов;
вторая цифра — может быть 0, но не такая, как первая, 9 вариантов;
третья цифра — не такая, как первые две
$10 - 2 = 8$ вариантов;
четвёртая цифра — не такая, как первые три
$10 - 3 = 7$ вариантов;
пятая цифра — не такая, как первые четыре
$10 - 4 = 6$ вариантов).
Пятизначных чисел, у которых есть две одинаковые цифры: $90000 - 27216 = 62784$.
Ответ: 62784.

150. У одного ученика 7 разных книг по математике, а у другого — 9 разных книг. Сколькими способами они могут обменять три книги одного на три книги другого?

Решения и ответы

5. 2.
Три числа, сумма цифр которых равна 4: 112, 121, 211.
Нечётные числа оканчиваются на нечётную цифру (1, 3, 5, 7, 9).
Два нечётных числа, сумма цифр которых равна 4: 121, 211.

6. 4.
Десять чисел, сумма цифр которых равна 6:
114, 141, 411, 123, 132, 213, 231, 312, 321, 222.
Чётные числа оканчиваются на 0, 2, 4, 6, 8.
Четыре чётных числа, сумма цифр которых равна 6:
114, 132, 312, 222.

7. 10.
Применить признак делимости на 3: сумма цифр числа должна делиться на 3.
10 чисел: 102, 120, 123, 132, 201, 210, 213, 231, 312, 321.

8. 6.
Применить признак делимости на 4: две последние цифры образуют двузначное число, делящееся на 4.
Две последние число числа: 36, 56 или 64.

6 чисел: 436, 536, 356, 456, 364, 564.

-
-
-

150. 2940.
Первый может выбрать 3 книги из 7 —
сочетания без повторений из 7 по 3:
(7 · 6 · 5) : (1 · 2 · 3) = 35 способов.
Второй может выбрать 3 книги из 9 —
сочетания без повторений из 9 по 3:
(9 · 8 · 7) : (1 · 2 · 3) = 84 способов.
По правилу произведения: 35 · 84 = 2940 способов.

МетаШкола

АА Л

Ф И

ISBN 978-5-6050452-6-7