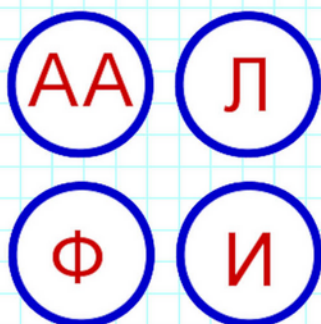
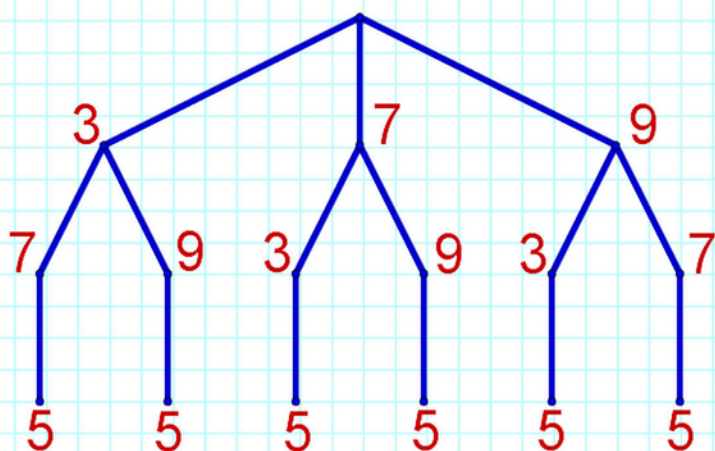


Е. В. Смыкалова

МАТЕМАТИКА

ЗАДАЧИ ПО КОМБИНАТОРИКЕ



Е. В. Смыкалова

Математика
Задачи по комбинаторике

7 класс

Демонверсия

Санкт-Петербург
СМИ МетаШкола
2023

УДК 373.51
ББК 20.я72

Смыкалова Елена Владимировна

С52

Математика. Задачи по комбинаторике.

7 класс: Сборник задач / Е. В. Смыкалова. – СПб.: СМИ
МетаШкола, 2023. – 83 с. – ISBN 978-5-6050452-6-7

Сборник содержит 150 задач по комбинаторике для 7 класса: задачи, которые решаются полным перебором и построением дерева вариантов; задачи на правила суммы и произведения; задачи на размещения, перестановки и сочетания. Рассматриваются различные способы решения задач. Приводятся образцы оформления для первых четырёх задач каждой главы. Ко всем задачам есть ответы и подробные решения в конце книги. Книга будет интересна и полезна ученикам 7 класса, их родителям и учителям математики.

ISBN 978-5-6050452-6-7

© Смыкалова Е. В., 2023

© СМИ МетаШкола, 2023

Все права защищены.

Эта книга, целиком или частично, не может быть использована или размещена где-либо в любой форме и с использованием любых технических средств без письменного разрешения владельца авторских прав. Нарушение прав преследуется по закону.

www.metaschool.ru

Оглавление

Предисловие.....	5
1. Полный перебор, дерево вариантов.....	6
2. Правила суммы и произведения.....	12
3. Размещения.....	20
4. Перестановки.....	26
5. Сочетания.....	32
6. Задачи повышенной сложности.....	39
Решения и ответы.....	46

Предисловие

Сборник содержит 150 задач по комбинаторике для 7 класса. В первой главе — задачи, которые решаются полным перебором и построением дерева вариантов; во второй главе — задачи на правила суммы и произведения; в третьей — размещения; в четвёртой — перестановки; в пятой — сочетания; в шестой — задачи повышенной сложности.

Рассматриваются различные способы решения задач. Приводятся образцы оформления для первых четырёх задач каждой главы. Ко всем задачам есть ответы и подробные решения в конце книги. Книга будет интересна и полезна ученикам 7 класса, их родителям и учителям математики.

Это четвёртая книга серии «Задачи по комбинаторике» 4 – 9 классы.

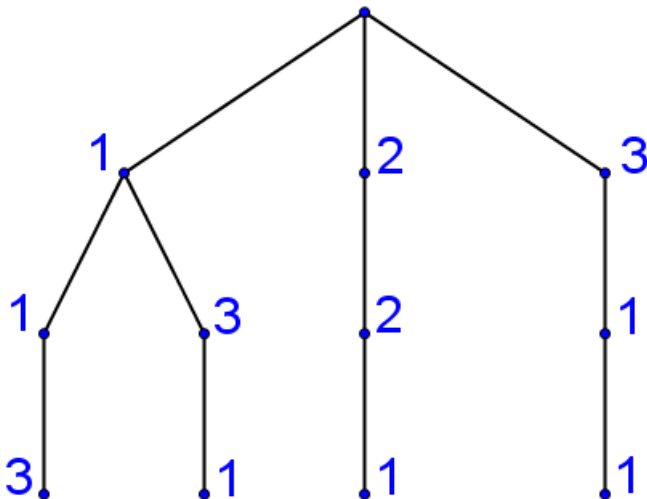
Материал книги был апробирован на уроках математики, на занятиях математического кружка в Физико-математическом лицее № 366 Санкт-Петербурга и в интернет-кружке МетаШколы www.metaschool.ru.

Желаем успехов в изучении математики!

1. Полный перебор, дерево вариантов

1. Из цифр 1, 2, 3 составили различные трёхзначные числа. Сколько среди них нечётных чисел, сумма цифр которых равна 5?

Решение.



Сумма цифр равна 5: $1 + 2 + 2$; $1 + 1 + 3$.

Трёхзначные числа, сумма цифр которых равна 5:

122, 212, 221, 113, 131, 311.

Нечётные числа оканчиваются на нечётную цифру (1, 3, 5, 7, 9).

Четыре нечётных числа, сумма цифр которых равна 5: 221, 113, 131, 311.

Ответ: 4.

-
-
-

20. Сколько различных комбинаций из букв, в которых две гласные не стоят рядом, и которые начинаются с буквы Ф, можно составить, переставляя буквы слова ЦИФРА?

2. Правила суммы и произведения

Правило суммы

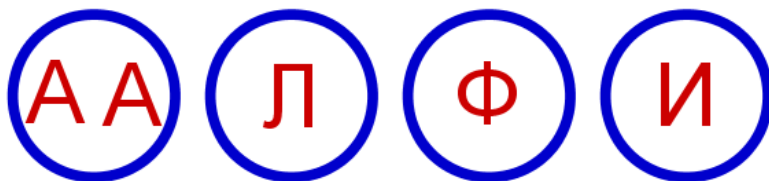
Если некоторый элемент A можно выбрать m способами, а элемент B можно выбрать n способами, то выбор "либо A , либо B " можно сделать $m+n$ способами.

Правило произведения

Если элемент A можно выбрать m способами, а элемент B можно выбрать n способами, то пару A и B можно выбрать $m \cdot n$ способами.

21. В расписании уроков для 7 класса на понедельник должно быть два спаренных урока алгебры, кроме того, литература, физика и история. Сколько вариантов расписания можно составить на этот день?

Решение.



Рассматривать два спаренных урока, как один урок.

Тогда получается не 5, а 4 урока (один из них спаренный).

По правилу произведения: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ способа.

Ответ: 24.

-
-
-

50. Сколько различных семизначных чисел, у которых каждые две соседние цифры разные?

3. Размещения

Комбинации из n элементов по k в каждой ($k \leq n$, $k > 0$), отличающиеся одна от другой либо составом, либо порядком расположения элементов, называются **размещениями** из n элементов по k элементов.

Число размещений без повторений из n элементов по k находится как произведение последовательно уменьшающихся на единицу сомножителей, первый из которых равен n . Число всех сомножителей равно k .

$$A_n^k = n(n - 1)(n - 2) \dots (n - k + 1)$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n - k)!}$$

Например, число размещений без повторений из 5 по 3:

$$A_5^3 = 5(5 - 1)(5 - 2) = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5 - 3)!} = 60$$

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$2! = 1 \cdot 2$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$$

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$$

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$$

$$A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Число размещений с повторениями из n элементов по k находится по формуле:

$$\bar{A}_n^k = n^k$$

Например, число размещений с повторениями из 2 по 5:

$$\bar{A}_2^5 = 2^5 = 32$$

51. Сколькими способами может разместиться семья из двух человек в четырёхместном купе, если других пассажиров в этом купе нет?

Решение.

Размещения без повторений: $4 \cdot 3 = 12$ способов.

Ответ: 12.

-
-
-

70. Сколькими способами можно составить семизначные телефонные номера из двоек, троек, четвёрок?

4. Перестановки

Перестановки без повторений из n элементов — это размещения из n элементов по n ; это комбинации из n элементов, отличающиеся друг от друга только порядком следования элементов.

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n - n)!} = \frac{n!}{1} = n!$$

Например, число перестановок без повторений из 5:

$$P_5 = A_5^5 = \frac{5!}{(5 - 5)!} = \frac{5!}{1} = 5! = 120$$

Число перестановок с повторениями из n элементов, из которых k — одинаковые находится по формуле:

$$\bar{P}_n(k) = \frac{n!}{k!}$$

Если несколько повторений, то число перестановок

с повторениями из n элементов, из которых k_1, k_2, \dots, k_m — одинаковые находится по формуле:

$$\bar{P}_n(k_1; k_2; k_3; \dots) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdot \dots}$$

Например, число перестановок с повторениями из 8, из которых 5 одинаковых элементов и 3 других одинаковых:

$$\bar{P}_8(5; 3) = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = 56$$

71. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, чтобы цифры в записи числа не повторялись?

Решение.

Первая цифра — одна из пяти (1, 2, 3, 4, 5).

Вторая цифра — любая из четырёх оставшихся.

Третья цифра — любая из трёх оставшихся.

Четвёртая цифра — любая из двух оставшихся.

Пятая цифра — та, что осталась.

По правилу произведения: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$.

Перестановки из 5 элементов или размещения из пяти элементов по пять.

Ответ: 120.

-
-
-

90. Сколько различных семизначных чисел можно составить, переставляя цифры 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3?

5. Сочетания

Сочетания без повторений из n элементов по k элементов — это комбинации из n элементов по k ($k \leq n$), отличающиеся друг от друга только составом элементов.

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

Например, число сочетаний без повторений из 5 по 3:

$$C_5^3 = \frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!} = 10$$

Число сочетаний с повторениями из m элементов по n определяется по формуле:

$$\bar{C}_m^n = C_{m+n-1}^n$$

Например, число сочетаний с повторениями из 2 по 5:

$$\bar{C}_2^5 = C_{2+5-1}^5 = C_6^5 = 6$$

91. Сколькими способами можно назначить двух дежурных из пяти учеников класса?

Решение.

Порядок следования элементов не важен, важен только состав двойки выбранных элементов.

1) Полный перебор.

Пусть пять учеников — A, B, C, D, E.

10 способов: AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE.

2) Число размещений без повторений из 5 по 2 надо разделить на число перестановок из 2 элементов.

Сочетания без повторений из 5 по 2:

$(5 \cdot 4) : (1 \cdot 2) = 10$ способов.

Ответ: 10.

-
-
-

120. На почте продаются открытки трёх разных видов — с розами, с гвоздиками, с васильками. Сколькими

способами можно купить 6 открыток?

6. Задачи повышенной сложности

121. Сколько различных пятизначных чисел, в записи которых не менее двух одинаковых цифр?

Решение.

Всего пятизначных чисел: $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 90000$
(первая цифра — любая, кроме нуля, 9 вариантов, остальные цифры — любые из 10).

Пятизначных чисел, у которых все цифры разные:

$$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27216$$

(первая цифра — любая, кроме нуля, 9 вариантов;
вторая цифра — может быть 0, но не такая, как первая, 9 вариантов;

третья цифра — не такая, как первые две
 $10 - 2 = 8$ вариантов;

четвёртая цифра — не такая, как первые три
 $10 - 3 = 7$ вариантов;

пятая цифра — не такая, как первые четыре
 $10 - 4 = 6$ вариантов).

Пятизначных чисел, в записи которых не менее двух одинаковых цифр: $90000 - 27216 = 62784$.

Ответ: 62784.

-
-
-

150. У одного ученика 7 разных книг по математике, а у другого — 9 разных книг. Сколькими способами они могут обменять три книги одного на три книги другого?

Решения и ответы

5. 2.

Три числа, сумма цифр которых равна 4: 112, 121, 211.

Нечётные числа оканчиваются на нечётную цифру (1, 3, 5, 7, 9).

Два нечётных числа, сумма цифр которых равна 4: 121, 211.

6. 4.

Десять чисел, сумма цифр которых равна 6:

114, 141, 411, 123, 132, 213, 231, 312, 321, 222.

Чётные числа оканчиваются на 0, 2, 4, 6, 8.

Четыре чётных числа, сумма цифр которых равна 6:

114, 132, 312, 222.

7. 10.

Применить признак делимости на 3: сумма цифр числа должна делиться на 3.

10 чисел: 102, 120, 123, 132, 201, 210, 213, 231, 312, 321.

8. 6.

Применить признак делимости на 4: две последние цифры образуют двузначное число, делящееся на 4.

Две последние число числа: 36, 56 или 64.

6 чисел: 436, 536, 356, 456, 364, 564.

-
-
-

150. 2940.

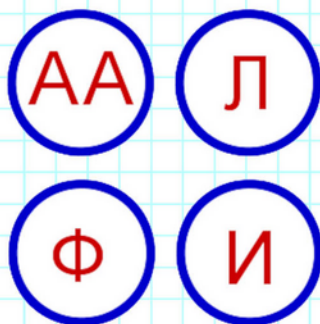
Первый может выбрать для обмена 3 книги из 7 — сочетания без повторений из 7 по 3:

$$(7 \cdot 6 \cdot 5) : (1 \cdot 2 \cdot 3) = 35 \text{ способов.}$$

Второй может выбрать 3 книги из 9 — сочетания без повторений из 9 по 3:

$$(9 \cdot 8 \cdot 7) : (1 \cdot 2 \cdot 3) = 84 \text{ способов.}$$

По правилу произведения: $35 \cdot 84 = 2940$ способов.



ISBN 978-5-6050452-6-7

