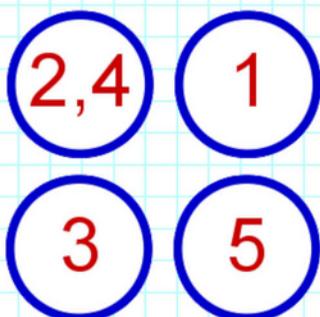
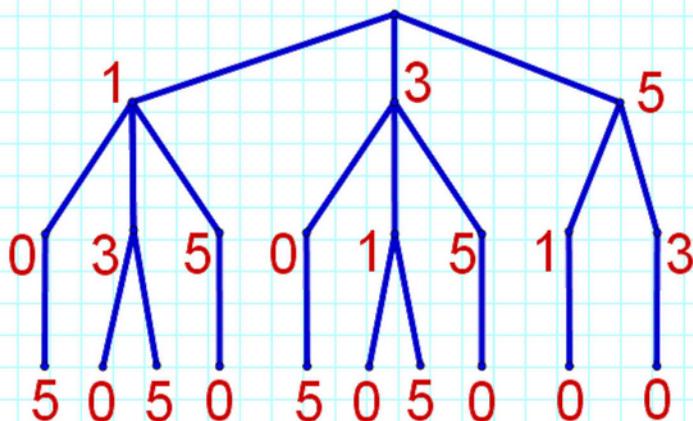


Е. В. Смыкалова

# МАТЕМАТИКА

## ЗАДАЧИ ПО КОМБИНАТОРИКЕ



9

Е. В. Смыкалова

Математика  
Задачи по комбинаторике

9 класс

Санкт-Петербург  
СМИ МетаШкола  
2023

УДК 373.51  
ББК 20.я72

Смыкалова Елена Владимировна

**С52** Математика. Задачи по комбинаторике.  
9 класс: Сборник задач / Е. В. Смыкалова. – СПб.: СМИ  
МетаШкола, 2023. – 89 с. – ISBN 978\_5\_6050452\_8\_1

Сборник содержит 150 задач по комбинаторике для 9 класса: задачи, которые решаются полным перебором и построением дерева вариантов; задачи на правила суммы и произведения; задачи на размещения, перестановки и сочетания. Рассматриваются различные способы решения задач. Приводятся образцы оформления для первых четырёх задач каждой главы. Ко всем задачам есть ответы и подробные решения в конце книги. Книга будет интересна и полезна ученикам 9 класса, их родителям и учителям математики.

ISBN 978\_5\_6050452\_8\_1 © Смыкалова Е. В., 2023  
© СМИ МетаШкола, 2023

Все права защищены.

Эта книга, целиком или частично, не может быть использована или размещена где-либо в любой форме и с использованием любых технических средств без письменного разрешения владельца авторских прав. Нарушение прав преследуется по закону.

[www.metaschool.ru](http://www.metaschool.ru)

---

## Оглавление

Предисловие.....	5
1. Полный перебор, дерево вариантов.....	6
2. Правила суммы и произведения.....	12
3. Размещения.....	19
4. Перестановки.....	26
5. Сочетания.....	33
6. Задачи повышенной сложности.....	42
Решения и ответы.....	48

## Предисловие

Сборник содержит 150 задач по комбинаторике для 9 класса. В первой главе — задачи, которые решаются полным перебором и построением дерева вариантов; во второй главе — задачи на правила суммы и произведения; в третьей — размещения; в четвёртой — перестановки; в пятой — сочетания; в шестой — задачи повышенной сложности.

Рассматриваются различные способы решения задач. Приводятся образцы оформления для первых четырёх задач каждой главы. Ко всем задачам есть ответы и подробные решения в конце книги. Книга будет интересна и полезна ученикам 9 класса, их родителям и учителям математики.

Это шестая книга серии «Задачи по комбинаторике» 4 – 9 классы.

Материал книги был апробирован на уроках математики, на занятиях математического кружка в Физико-математическом лицее № 366 Санкт-Петербурга и в интернет-кружке МетаШколы [www.metaschool.ru](http://www.metaschool.ru).

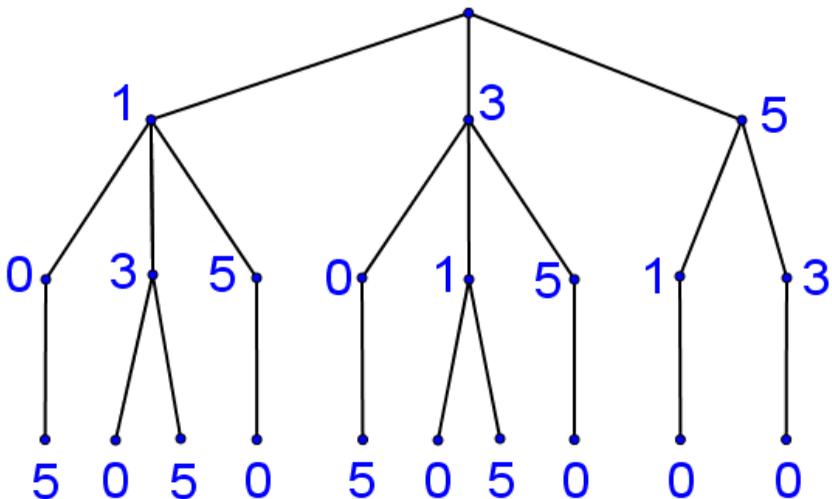
Желаем успехов в изучении математики!

## 1. Полный перебор, дерево вариантов

1. Сколько трёхзначных чисел, делящихся на 5, у которых все цифры разные, и которые записываются с помощью цифр 0, 1, 3, 5?

Решение.

Дерево возможных вариантов:



Применить признак делимости на 5:  
последняя цифра — 0 или 5.

## 1. Полный перебор, дерево вариантов

---

Если последняя цифра 0, то 6 чисел:

130, 150, 310, 350, 510, 530.

Если последняя цифра 5, то 4 числа:

105, 135, 305, 315.

Всего:  $6 + 4 = 10$  чисел.

Ответ: 10.

- 
- 
- 

24. В куртке разных два кармана. Сколькими способами можно разложить три различные монеты по этим карманам?

## 2. Правила суммы и произведения

### Правило суммы

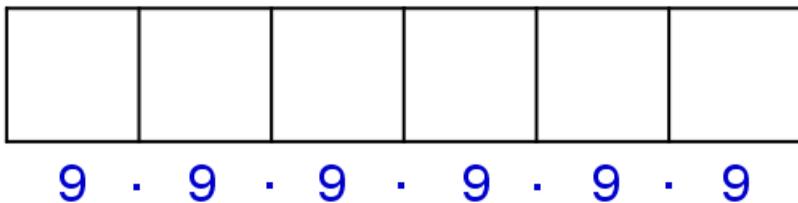
Если некоторый элемент  $A$  можно выбрать  $m$  способами, а элемент  $B$  можно выбрать  $n$  способами, то выбор "либо  $A$ , либо  $B$ " можно сделать  $m+n$  способами.

### Правило произведения

Если элемент  $A$  можно выбрать  $m$  способами, а элемент  $B$  можно выбрать  $n$  способами, то пару  $A$  и  $B$  можно выбрать  $m \cdot n$  способами.

25. Сколько различных шестизначных чисел, у которых каждые две соседние цифры разные?

Решение.



Первая цифра — любая из девяти (1, 2, 3, ..., 9); девять вариантов; с нуля шестизначные числа не начинаются.

## 2. Правила суммы и произведения

---

Вторая цифра — любая из девяти, может быть 0, но не такая, как первая цифра; девять вариантов.

Третья цифра — тоже девять вариантов, цифра не такая, как вторая и так далее.

По правилу произведения:  $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 531441$ .

Ответ: 531441.

- 
- 
- 

50. Имеются 3 разные чашки, 6 разных блюдец и 9 разных ложек. Сколькими способами можно накрыть стол для троих, чтобы у каждого была чашка, блюдце и ложка?

## 3. Размещения

Комбинации из  $n$  элементов по  $k$  в каждой ( $k \leq n$ ,  $k > 0$ ), отличающиеся одна от другой либо составом, либо порядком расположения элементов, называются **размещениями** из  $n$  элементов по  $k$  элементов.

**Число размещений без повторений** из  $n$  элементов по  $k$  находится как произведение последовательно уменьшающихся на единицу сомножителей, первый из которых равен  $n$ . Число всех сомножителей равно  $k$ .

$$A_n^k = n(n - 1)(n - 2) \dots (n - k + 1)$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n - k)!}$$

Например, число размещений без повторений из 5 по 3:

$$A_5^3 = 5(5 - 1)(5 - 2) = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5 - 3)!} = 60$$

### 3. Размещения

---

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$2! = 1 \cdot 2$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$$

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$$

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$$

$$A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

**Число размещений с повторениями** из  $n$  элементов по  $k$  находится по формуле:

$$\bar{A}_n^k = n^k$$

Например, число размещений с повторениями из 2 по 5:

$$\bar{A}_2^5 = 2^5 = 32$$

### 3. Размещения

---

51. В 9 классе изучаются 13 предметов. Сколькими способами можно составить расписание уроков на понедельник, если в этот день должно быть 5 различных уроков?

Решение.

$$A_{13}^5 = \frac{13!}{(13 - 5)!} = 154440$$

Размещения без повторений из 13 по 5:

$13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 154440$  способов.

Ответ: 154440.

- 
- 
- 

70. Имеется шесть разных коробок. Сколькими способами можно разложить девять пронумерованных шаров по этим коробкам?

### 4. Перестановки

**Перестановки без повторений** из  $n$  элементов — это размещения из  $n$  элементов по  $n$ ; это комбинации из  $n$  элементов, отличающиеся друг от друга только порядком следования элементов.

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n - n)!} = \frac{n!}{1} = n!$$

Например, число перестановок без повторений из 5:

$$P_5 = A_5^5 = \frac{5!}{(5 - 5)!} = \frac{5!}{1} = 5! = 120$$

**Число перестановок с повторениями** из  $n$  элементов, из которых  $k$  — одинаковые находится по формуле:

$$\bar{P}_n(k) = \frac{n!}{k!}$$

Если несколько повторений, то число перестановок

#### 4. Перестановки

---

с повторениями из  $n$  элементов, из которых  $k_1, k_2, \dots, k_m$  — одинаковые находится по формуле:

$$\bar{P}_n(k_1; k_2; k_3; \dots) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdot \dots}$$

Например, число перестановок с повторениями из 8, из которых 5 одинаковых элементов и 3 других одинаковых:

$$\bar{P}_8(5; 3) = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = 56$$

71. Сколько различных семизначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 так, чтобы чётные цифры были рядом? Цифры в записи числа не должны повторяться.

Решение.



Объединить чётные цифры 2, 4, 6 в один элемент.

#### 4. Перестановки

---

Шесть вариантов перестановок из трёх элементов:  $3! = 6$ .

Всего элементов:  $7 - 3 + 1 = 5$ .

Перестановки из пяти элементов:  $5! = 120$ .

$$P_3 \cdot P_5 = 3! \cdot 5! = 720$$

Всего:  $6 \cdot 120 = 720$  чисел.

Ответ: 720.

- 
- 
- 

90. Сколько различных «слов» можно составить, переставляя буквы в слове ПАРАЛЛЕЛОГРАММ?

## 5. Сочетания

**Сочетания без повторений** из  $n$  элементов по  $k$  элементов — это комбинации из  $n$  элементов по  $k$  ( $k \leq n$ ), отличающиеся друг от друга только составом элементов.

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

Например, число сочетаний без повторений из 5 по 3:

$$C_5^3 = \frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!} = 10$$

**Число сочетаний с повторениями** из  $m$  элементов по  $n$  определяется по формуле:

$$\bar{C}_m^n = C_{m+n-1}^n$$

## 5. Сочетания

---

Например, число сочетаний с повторениями из 2 по 5:

$$\bar{C}_2^5 = C_{2+5-1}^5 = C_6^5 = 6$$

91. Сколькими способами можно разбить группу из 15 человек на две группы — 5 человек и 10 человек?

Решение.

$$C_{15}^5 = \frac{15!}{(15-5)! \cdot 5!} = 3003$$

$$C_{15}^5 = C_{15}^{15-5} = 3003$$

Выбрать 5 человек в первую группу — сочетания из 15 по 5, оставшиеся 10 человек во вторую группу.

Сочетания без повторений из 15 по 5:

$(15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11) : (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) = 3003$  способа.

Ответ: 3003.

- 
- 
-

## 5. Сочетания

---

126. Из колоды, содержащей 52 карты, взяли 8 карт. В скольких случаях среди этих 8 карт окажется ровно 3 туза?

## 6. Задачи повышенной сложности

127. Сколько различных трёхзначных чисел, у которых произведение цифр меньше трёх?

Решение.

1) Наборы цифр из 1 и 2 без нуля, двоек не больше одной; три варианта с двойкой: 211, 121, 112.

2) Один набор без нуля и без двойки: 111.

3) Наборы цифр с одним нулем:

а)  $9 \cdot 1 \cdot 9 = 81$ ;

первая и последняя цифры любые из 9, от 1 до 9 включительно, а вторая цифра 0;

б)  $9 \cdot 9 \cdot 1 = 81$ ;

первая и вторая цифры любые из 9, от 1 до 9 включительно, а последняя цифра 0.

4) Наборы цифр с двумя нулями — девять вариантов: 100, 200, ..., 900.

По правилу суммы:  $3 + 1 + 81 + 81 + 9 = 175$ .

Ответ: 175.

- 
- 
-

## 6. Задачи повышенной сложности

---

150. В классе 12 девочек и 10 мальчиков. Для участия в конкурсе от класса надо сформировать команду из пяти человек так, чтобы мальчиков в команде было не более трёх. Сколькими способами это можно сделать?

## Решения и ответы

5. 4.

Сумма цифр равна 4:

$0 + 0 + 4$ ;  $0 + 1 + 3$ ,  $0 + 2 + 2$ ,  $1 + 1 + 2$ .

Нечётные числа оканчиваются на нечётную цифру (1, 3, 5, 7, 9).

4 нечётных числа, сумма цифр которых равна 4:

103, 301, 121, 211.

6. 6.

Сумма цифр равна 5:

$0 + 0 + 5$ ;  $0 + 1 + 4$ ;  $0 + 2 + 3$ ;  $1 + 2 + 2$ ;  $1 + 1 + 3$ .

Чётные числа оканчиваются на чётную цифру (0, 2, 4, 6, 8).

6 чётных чисел, сумма цифр которых равна 5:

500, 410, 320, 302, 212, 122.

7. 8.

Первые две цифры — 13 или 31; два варианта.

Третья цифра числа — любая из четырёх (2, 4, 6, 8).

8 чисел: 132, 134, 136, 138, 312, 314, 316, 318.

8. 12.

Первые две цифры — 24, 42, 26, 62, 46, 64;

шесть вариантов.

Третья цифра числа — любая из двух (1 или 3).

12 чисел:

241, 421, 261, 621, 461, 641,

243, 423, 263, 623, 463, 643.

- 
- 
- 

150. 23562.

1) В команде только девочки — сочетания из 12 по 5:

$$(12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8) : (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) = 792.$$

2) В команде один мальчик, четыре девочки — сочетания из 10 по 1 умножить на сочетания из 12 по 4:

$$10 \cdot ((12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9) : (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4)) = 4950.$$

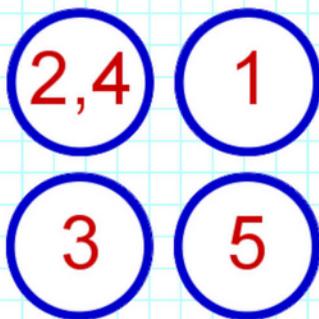
3) В команде два мальчика, три девочки — сочетания из 10 по 2 умножить на сочетания из 12 по 3:

$$((10 \cdot 9) : (1 \cdot 2)) \cdot ((12 \cdot 11 \cdot 10) : (1 \cdot 2 \cdot 3)) = 9900.$$

4) В команде три мальчика, две девочки — сочетания из 10 по 3 умножить на сочетания из 12 по 2:

$$((10 \cdot 9 \cdot 8) : (1 \cdot 2 \cdot 3)) \cdot ((12 \cdot 11) : (1 \cdot 2)) = 7920.$$

По правилу суммы:  $792 + 4950 + 9900 + 7920 = 23562$ .



ISBN 978-5-6050452-8-1

